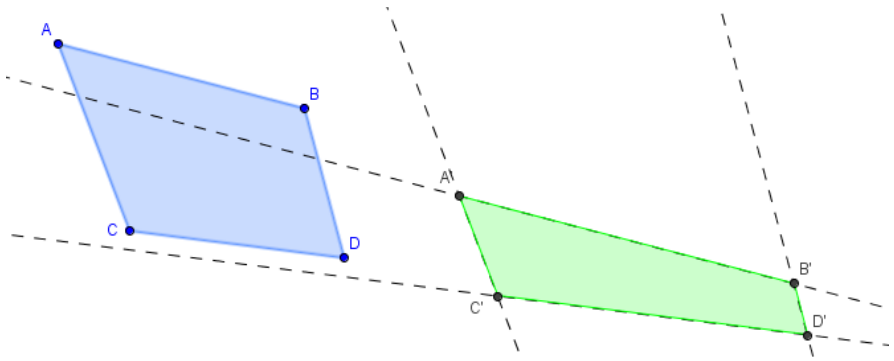
יחס, פרופורציה ודמיון



יחס פרופורציה ודמיון

תוכן עניינים

הקדמה 4

יחס ופרופורציה בתוכנית הלימודים: 4

רקע 6

רקע מתמטי 6

רקע פדגוגי דידקטי 10

סדנה 1: מתחילים לחשוב פרופורציה 17

פתרונות והנחיות למדריך 19

סדנה 2: סוגי שאלות ואסטרטגיות פתרון 27

פתרונות והנחיות למדריך 31

הצעה לפתרון השאלות: 32

סדנה 3: על תנאים לדמיון משולשים ומרובעים 38

פתרונות והנחיות למדריך 42

הצעה לפתרון: 42

מקורות 50

רשימת קישורים 51

לקריאה נוספת 52

הקדמה

הקניית החשיבה הפרופורציונאלית נחשבת כציון דרך בהתפתחות הקוגניטיבית של התלמיד. על חשיבותה של החשיבה הפרופורציונאלית בתוכנית הלימודים ניתן ללמוד גם מתוך תוכנית הלימודים עצמה וגם בעקרונות ובסטנדרטים של **Commom Core State Standards Initiative (CCSSI)**, הרואים חשיבות רבה בפיתוח ההבנה והיישום של חשיבה פרופורציונאלית ויחס בפתרון בעיות מחיי היום יום. ראשית הוראת הנושא כבר בבית הספר היסודי, דרך חטיבת הביניים וזאת כבסיס ללימוד נושאים מתקדמים במתמטיקה הנלמדים בתיכון. חשיבות הנושא באה לידי ביטוי בהקשר לנושאי לימוד נוספים בבית-הספר, כגון: שברים (על המשמעויות השונות, והשוואתם), מעבר בין יחידות מידה, קנה מידה, בעיות יחס, יחס ישר ויחס הפוך, הסתברות, דמיון משולשים, טריגונומטריה וכו'.

ביחידה זו נציג את הרקע המתמטי, הפדגוגי והדידקטי בהתאם למחקרים שהתבצעו בנושא זה.

יחס ופרופורציה בתוכנית הלימודים:

יחס ופרופורציה
כיתה ה'
▪ התלמיד מכיר משמעות נוספת של השבר, השבר כמנת חילוק (מלבד, השבר כחלק מהשלם והשבר כחלק של הכמות). ▪ התלמיד מכיר את פעולת ההרחבה והצמצום של שבר ומשתמש בה לצורך השוואה בין שברים.
כיתה ו'
▪ התלמיד מכיר את ההגדרה של היחס ואת צורת הרישום שלו. ▪ התלמיד יודע לזהות ולמצוא את היחס שבין שני הגדלים שבניהם מחושב היחס. ▪ התלמיד יודע לחלק כמות לפי יחס נתון (חלוקה לא שווה).

- התלמיד יודע למצוא נתון חסר במצבים המבוססים על יחסים במספרים קטנים - גם באמצעות ייצוג היחס כשבר.
- התלמיד *משתמש* ביחס לצורך מעברים בין יחידות מידה (עשרוניות ואחרות).
- התלמיד יודע לפתור בעיות מילוליות המצריכות שיקולי יחס.
- התלמיד *משתמש* בשיקולי יחס לצורך פתרון בעיות בנושא קנה מידה.

כיתה ח'

- התלמיד יודע למצוא ולכתוב יחס בין שני גדלים
- התלמיד מבין את תכונת היחס.
- התלמיד יודע לחלק כמות (או כל גודל אחר) לפי ליחס נתון.
- התלמיד יודע למצוא את המספר החסר בפרופורציה *על ידי שימוש* במשוואה מהסוג $\frac{x}{c}=\frac{b}{c}$ (a, b, c מספרים, x משתנה השונים מאפס).
- התלמיד יודע לזהות יחס ישר או הפוך בין גדלים, מתוך ייצוג מילולי, ייצוג גרפי או ייצוג סימבולי.
- התלמיד *משתמש* בפרופורציה לצורך מציאת גודל חסר בפתרון בעיות קנה מידה ודמיון משולשים.
- התלמיד *משתמש* במושג היחס לצורך חישוב השכיחות היחסית של נתון (הסתברות *של* מאורע).

רקע

רקע מתמטי

על ההבדל שבין יחס לפרופורציה

יחס ופרופורציה הם צמד מילים שבדרך כלל מופיעות בסמיכות זו לזו, עובדה שעשויה ליצור (אצל הלומד או המורה) את התחושה שמדובר במושגים בעלי מובן דומה. במטרה לחדד את ההבדלים שבין שני מושגים אלה, נציג בסעיף זה הגדרות לשני המושגים (כפי שהן מופיעות **בתוכנית הלימודים לכיתה ח'**) ומספר הערות חשובות בנוגע להם.

יחס מאפשר להשוות בין שני גדלים על פי מנתם.

- היחס בין a ל- b (a ו- b מספרים החיוביים) ניתן לכתוב בשני אופנים: $a:b$ או $\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$ המספרים a ו- b נקראים גורמי היחס.

  לדוגמה: באולם הקולנוע היחס בין מספר האנשים שגילם מעל 70 למספר הילדים שגילם מתחת ל- 7 הוא 2:9.
- כאשר הגדלים שונים זה מזה היחס $a:b$ שונה מהיחס $b:a$ $(a,b\neq 0)$.

  דוגמה: היחס בין מספר הילדים שגילם מתחת ל- 7 למספר האנשים שגילם מעל 70 הוא 9:2, והיחס בין מספר האנשים שגילם מעל 70 למספר הילדים שגילם מתחת ל- 7 הוא 2:9.
- בדרך כלל מביעים את היחס בין שני גדלים בצורה מצומצמת, כלומר כמנה של שני מספרים טבעיים זרים (מספרים בעלי מחלק משותף השווה ל- 1).

  דוגמה: את היחס בין המספר 12 למספר 15 לעיתים נכתוב כך: 4:5.
- מבחינים בין שני סוגי יחסים: יחס בין שני גדלים, שלהם יכולה להיות יחידה זהה, לבין יחס בין שני גדלים, שלהם יחידות שונות.

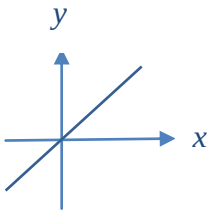
דוגמה: היחס של 120 אנשים ל- 60 אנשים הוא 120:60 (או 2:1). לעומת. ב- 3 שעות עברנו 15 ק"מ. היחס בין אורך הדרך לזמן הוא 15:3 ק"מ בשעה או 5 קמ"ש.

- במקרה של יחס בין שני גדלים בעלי יחידה משותפת, יש להקפיד ולבטא את שני הגדלים באותה יחידת מידה. לדוגמה כאשר הגדלים הם מרחקים יש לבטא אותם באותה יחידת מידה כגון: ס"מ, מ', ק"מ. היחס במקרה זה הוא מספר חסר מימד (כלומר ללא יחידת מידה). לעומת המקרה של יחס בין שני גדלים שלהם יחידה שונה כגון: יחס בין דרך (יחידת אורך) לזמן (יחידות זמן), היא המהירות. במקרה הזה היחס הוא מספר עם מימד (דרך בזמן).

פונקציית יחס ישר

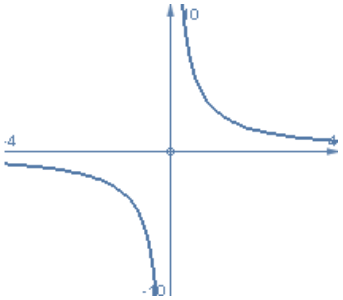
בין שני הגדלים א' ו- ב' מתקיים יחס ישר, אם כאשר גודל א' גדל (או קטן) פי מספר מסוים גם גודל ב' גדל (או קטן) פי אותו מספר בהתאמה. דוגמה: במהירות קבועה של נסיעה (נניח שיש כזאת) היחס בין אורך הדרך לבין הזמן הוא יחס קבוע: אם אורך הדרך עלה פי 2 גם זמן הנסיעה עלה פי 2.

- בכתיב סימבולי נבטא את היחס הישר באופן הבא: $y = kx$, $k > 0$.
  נשים לב, כי היחס בין הגדלים הוא חיובי בעוד שבפונקצית היחס הישר x יכול להיות גם שלילי.
- הצגה גרפית של יחס ישר הוא ישר העובר דרך ראשית הצירים.



פונקציית יחס הפוך

בין שני הגדלים x ו- y מתקיים יחס הפוך אם מכפלתם של שני גדלים x ו- y קבועה ואינה 0. כלומר מתקיים: $xy = k$, $x, y, k \neq 0$ או $y = \frac{k}{x}$.



פרופורציה

פרופורציה היא שוויון בין יחסים.

פרופורציה ניתנת להצגה בשני אופנים: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ או $a:b=c:d$ בתנאי ש- $a,b,c,d\neq 0$. משמעות הכתיבה: היחס של a ל-b שווה ליחס של c ל- d.

תכונות הפרופורציה:

1. אם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז $a\cdot d=b\cdot c$

הוכחה: מ- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ נובע: $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$, כלומר $a\cdot d=c\cdot b$

2. אם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

הוכחה: התכונה הזאת נובעת מתכונות השברים: אם שני שברים שווים זה לזה, אז גם השברים ההפוכים שווים זה לזה.

3. אם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$ וגם $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

הוכחה: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ מכאן: $ad=bc$ מכאן: $ad+ac=bc+ac$

מכאן: $a(c+d)=c(a+b)$ מכאן: $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

שימוש בתכונת הפרופורציה ופתרון משוואה

הפרופורציה הופכת למשוואה אם הערך המספרי של אחד הגורמים בה אינו ידוע. לצורך מציאת המספר החסר ניתן להיעזר במספר דרכים.

לדוגמה: מכונית צרכה 16 ליטר בנסיעה של 100 ק"מ. כמה דלק תצרוך המכונית אם תעבור מרחק של 125 ק"מ?

נפתור ב- 3 דרכים:

1. בעזרת משוואה $\frac{16}{100}=\frac{x}{125}$ ומתכונת הפרופורציה נקבל $16\cdot 125=100x$

   כלומר: $x=\frac{2000}{100}=20$ ליטר.

2. בעזרת מציאת גורם ההרחבה.

   לדוגמה: הדרך גדלה פי 1.25 ולכן גם כמות הדלק תגדל פי 1.25 ונקבל $1.25\cdot 16=20$, כלומר 20 ליטר.

3. בעזרת ערך משולש. מציאת הערך המתאים ליחידה אחת.

   נערוך את הנתונים באופן הבא:

כמות דלק	מס' ק"מ
16	100
?	125

   כלומר נקבל שצריכת הדלק המבוקשת שווה ל: $125\cdot 16:100=20$

   נשים לב כי בדרך זו נמצא את צריכת הדלק עבור 1 ליטר $\frac{16}{100}=0.16$,

   ונכפול את הכמות המתקבלת במספר הק"מ כלומר: $125\cdot 0.16=20$.

דמיון

הגדרה: שתי צורות דומות כאשר יש להן אותה צורה, ואפשר לקבל אחת מהן על ידי הגדלה או הקטנה של האחרת (עם גורם הגדלה או הקטנה מסוים), כלומר היחס בין אורכי זוגות של צלעות מתאימות הוא מספר קבוע (גורם ההגדלה או גורם ההקטנה). כאשר שתי צורות חופפות, הן נחשבות גם כדומות, גורם ההגדלה

במקרה זה הוא 1.

משולשים דומים הם משולשים שבהם לכל זווית במשולש אחד יש זווית ששווה לה במשולש האחר. במשולשים דומים היחס בין כל שתי צלעות במשולש אחד שווה ליחס שבין כל שתי **הצלעות המתאימות** במשולש האחר (הצלעות המתאימות נמצאות מול הזוויות שוות).

היחס בין כל שתי צלעות מתאימות במשולשים דומים נקרא **יחס הדמיון**.

מצולעים דומים הם מצולעים שבהם לכל זווית במצולע אחד יש זווית מתאימה ששווה לה במצולע האחר כך שהסדר בין הזוויות השוות נשמר, והיחס בין כל שתי צלעות במצולע אחד שווה ליחס שבין שתי הצלעות המתאימות במצולע האחר.

רקע פדגוגי דידקטי

תוכניות הלימודים בבית-הספר היסודי ובחטיבת הביניים מדגישות את חשיבות פיתוח וטיפוח יכולות החשיבה הפרופורציונאלית של תלמידי כיתות הביניים (ה' – ח'). אחת הדרכים לפתח יכולות החשיבה הפרופורציונאלית היא לעזור לתלמידים להבין כיצד לקשר בין הכמויות השונות שביחסים המושווים כך שניתן יהיה לחקור ולהרחיב את הקשרים שבין כמויות אלו. Billings (1998) מכנה את היכולות לחשוב על כמויות ועל הקשרים השונים שביניהם במצבים של פרופורציה - **חוש לפרופורציה**.

Lamon (1993b) מזהה ארבעה סוגים שונים של בעיות פרופורציה:

בעיית **חלק-חלק-שלם-** בעיה בה תת קבוצה של שלם מושווית עם תת קבוצה משלימה שלה (למשל- בנים בנות) או עם השלם עצמו (למשל 12 בנים מתוך 20 תלמידים). דוגמה לשאלה: כיתה המונה 35 תלמידים מחולקת ל- 7 קבוצות כך שבכל קבוצה יש 3 בנות. כמה בנות וכמה בנים לומדים בכיתה?

בעיות העוסקות ב**קבוצות מקושרות,** כלומר בקבוצות המקשרות בין שתי כמויות, שבדרך כלל אינן מקושרות ביניהן, באמצעות תוכן הבעיה, כמו למשל

בלונים ודולרים, עוגיות וקופסאות. דוגמה לשאלה: חבילה של 5 מחברות עולה 12 שקלים. כמה עולות 15 מחברות?

בעיות העוסקות **ביחידות מידה ידועות** מבטאות יחסים הידועים היטב או קצבים, למשל: המהירות היא היחס בין דרך לזמן, מחיר ליחידה הוא היחס בין כמות פריטים לעלותם הכספית. דוגמה לשאלה: לצורך נסיעה של 30 ק"מ דרושים 4 ליטר דלק. האם 6 ליטר דלק יספיקו לנסיעה של 50 ק"מ (בהנחה שתצרוכת הדלק לק"מ קבועה)?

בעיות **הגדלה** מבטאות יחס בין שתי כמויות רציפות, כמו גובה, אורך, רוחב או היקף. הבעיות האלה העוסקות או **בעליה** (הגדלה, מתיחה...) או **בירידה**, (הקטנה, כיווץ...). דוגמה לשאלה: לאלעד יש תמונה ברוחב 7.2 ס"מ ובאורך 10.1 ס"מ. אלעד רוצה להגדיל את התמונה לתמונה ברוחב 18 ס"מ. מה יהיה אורכה של התמונה המוגדלת אם היא תשמור על הפרופורציות של התמונה המקורית?

לפתרון סוגים שונים של בעיות מפעילים התלמידים אסטרטגיות שונות. לעיתים מושפעת אסטרטגיית הפתרון בה בוחר התלמיד ממבנה הבעיה, הקשרה (קונטקס) ונתוניה המספריים . **(Cramer & post, 1993)**.

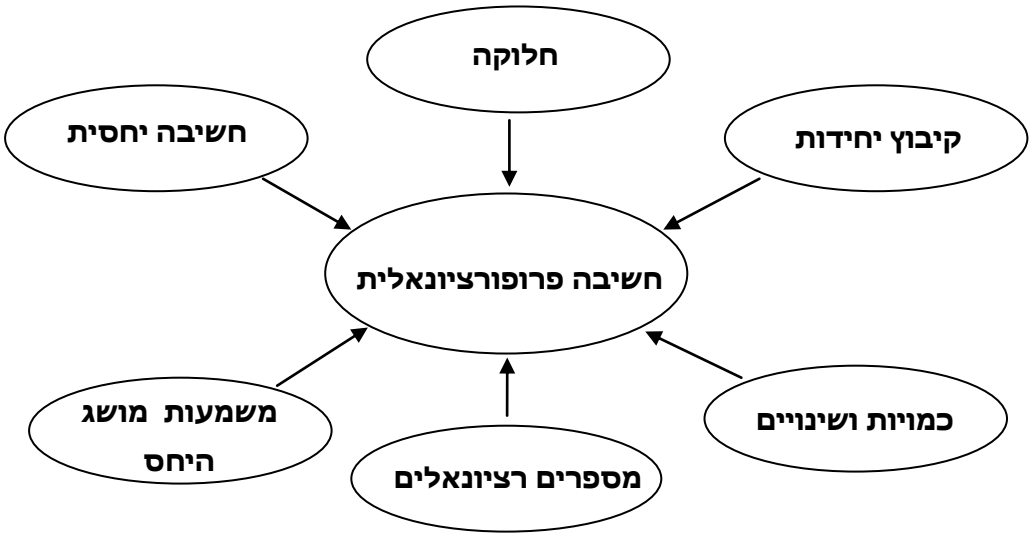
אסטרטגיות פתרון של תלמידים (Cramer & post, 1993)

אסטרטגיה	תאור האסטרטגיה
אסטרטגיה של יחידת היחס (Unit-rate strategy)	אסטרטגיה זו מתבססת על יחידת יחס. לדוגמה: במתכון כתוב שיש להוסיף 3 כפות תרכיז מיץ לכל 4 כוסות מים. נוכל להסיק שיש להוסיף $\frac{3}{4}$ כף תרכיז מיץ לכוס אחת של מים. יחידת היחס היא $\frac{3}{4}$ כף לכוס. בלהתבסס על יחס זה, על התלמיד להשתמש בכל מתכון אחר המבוסס על אותו יחס ולענות על כל השאלות הקשורות ליחס הזה. כך למשל, התלמיד אמור להסיק שלכל 3 כפות תרכיז מיץ יש להוסיף 4 כוסות מים, או שיש להוסיף $\frac{4}{3}$ כוס מים לכל כף תרכיז מיץ. אם שואלים כמה תרכיז מיץ יש להוסיף ל- 2 כוסות מים, התלמיד אמור לכפול $\frac{3}{4}$ (כף לכוס) ב- 2 (כוסות) ולקבל 1.5 (כפות). אם השאלה היא על כמות המים שיש להוסיף לכמות נתונה של תרכיז מיץ, יש להשתמש ביחידת יחס הפוכה: $\frac{4}{3}$ כוס לכף.
אסטרטגיה של גורם שינוי היחס (Factor-of-change strategy)	האסטרטגיה "גורם שינוי היחס" היא אסטרטגיה "פי כמה גדול (קטן)". בדוגמה: מכיוון שלכל 4 כוסות מים יש להוסיף 3 כפות תרכיז מיץ, ומכיוון ש- 2 קטן פי 2 מ- 4, ל- 2 כוסות מים יש להוסיף פי 2 פחות תרכיז מיץ, כלומר 1.5 כפות.

אסטרטגיה של שברים (Fraction strategy)	האסטרטגיה זאת דומה לאסטרטגיה של יחידת היחס, רק כאן מתייחסים לשברים ולשקילותם. האסטרטגיה הזו לא תמיד נוחה: למשל במתכון הנ"ל לא נוח לפעול בשברים (כי התוצאה המתקבלת היא גם שבר). אך אם שואלים על כמות תרכיז המיץ ל- 16 כוסות מים, אפשר להפעיל את אסטרטגית השברים: יחידת היחס היא $\frac{3}{4}$. נכפול את המונה ואת המכנה ב- 4 ונקבל שבר שקול $\frac{12}{16}$. כלומר יש להוסיף 12 כפות תרכיז ל- 16 כוסות מים. שימוש באסטרטגיה זאת דורש ידע והבנה טובה בשברים.
אסטרטגיה "אלכסונית" (Cross multiplication algorithm)	התלמיד כותב פרופורציה (שוויון של שני יחסים), מכפיל באלכסון ופותר משוואה: $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$ $ad=xc$ $x=\frac{ad}{c}$ בדוגמה: אם שואלים על כמות המים ל-12 כפות תרכיז: $\frac{12}{x}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=16$

מהי חשיבה פרופורציונאלית?

חשיבה פרופורציונאלית אינה מסתכמת רק בשימוש במשוואה המתאימה לסוג הקשר שבין המשתנים או בהבחנה בין קשרים פרופורציונאלים לבין קשרים שאינם פרופורציונאלים. בשל הקושי להגדיר מהי חשיבה פרופורציונאלית זיהו חוקרים (Lamon, 1999) מספר מרכיבים התורמים לחשיבה פרופורציונאלית.



תיאור המרכיבים התורמים לחשיבה פרופורציונאלית (Lamon, 1999)

המרכיב	תאור המרכיב
חשיבה יחסית (Relative Thinking)	ניתנת לתיאור כחשיבה כפלית. חשוב שהתלמיד יכיר את ההבדל שבין שינוי מוחלט, או אדיטבי (חיבורי) לבין שינוי יחסי, או כפלי. המעבר משינוי חיבורי לשינוי יחסי הוא שלב חשוב לצורך ביצוע המעבר מחשיבה חיבורית לכפלית. לדוגמה: שינוי חיבורי משנה את הכמות המקורית בכמות מוחלטת קבועה. לדוגמה מחירה של כרטיסיה חודשית עלה ב-10 שקלים. לעומת שינוי יחסי המשנה את הכמות המקורית בכמות שהיא יחסית לכמות המקורית, למשל, המחיר של כרטיסיה חודשית עלה ב- 10%.

חלוקה (partitioning)	חלוקה של אוביקט היא תהליך שבו מחולק האוביקט למספר חלקים המרכיבים את השלם. לדוגמה בשברים בכדי לקבוע את מרכיבי השבר יש לבצע חלוקה לחלקים בגודל שווה.
קיבוץ יחידות (Unitizing)	קיבוץ בהתאם ליחס נתון. דוגמה: 3 בלונים עולים 2₪. כמה עולים 24 בלונים? קיבוץ של 24 בלונים ל- 8 קבוצות של 3 בלונים כל אחת, היא דוגמה לקיבוץ יחידות שבה יחידת הקיבוץ שנבחרה היא 3 בלונים. הציפייה שתלמיד יתאים את יחידת הקיבוץ לסיטואציה. על מנת לעודד את התלמיד לבצע מעברים כאלה בגמישות חשוב לבקש ממנו להסביר את בחירתו.
משמעות היחס	משמעות היחס באה לידי ביטוי בחשיבה גמישה בבעיות וסיטואציות העוסקות ביחס.
מספרים רציונאלים	מספרים רציונאלים הם מספרים שניתן לכתוב אותם כשברים: $\frac{a}{b}$ כאשר $b\neq 0$, ו- a ו- b הם מספרים שלמים. חשיבה על מספרים רציונאליים כשברים מצריכה חשיבה גמישה על שברים, יחס, קצב, אחוזים ופעולות עליהם.
כמויות ושינויים	חשיבה כמותית כוללת את היכולת לפרש ולפעול כאשר הכמויות משתנות, בין אם השינוי בקצב קבוע ובין אם השינוי בקצב משתנה. כלומר לא די בכך, שהתלמיד זיהה שהקשר בין הכמויות הנתונות הוא פרופורציונאלי, עליו גם לזהות כיצד ישפיע השינוי בכמות האחת על הכמות האחרת (כלומר זיהוי סוג היחס: ישר או הפוך).

המלצות להוראת נושא היחס והפרופורציה

להלן מספר המלצות שגובשו מתוך פרויקט PUMP (Peoria Urban Mathematics Plan) באלגברה, שנערך בארה"ב במטרה לשפר את ידע המורים. בפרויקט השתתפו מורים המלמדים בכיתות ה' - ח' ומטרתו היתה לעזור למורים להבין מדוע תלמידים רבים כל כך אינם מצליחים בעבודה עם יחס.

- ההוראה בחשיבה פרופורציונאלית צריכה להתחיל ממצבים שניתן לדמיין או לייצג בעצמים או באיורים.
- חשוב לדחות עד כמה שניתן את השימוש בפרוצדורות כגון: הערך המשולש, זאת במטרה לבסס הבנה מושגית. מתן הזדמנות לתלמיד להסתמך על הידע הלא פורמלי שלו הכרחית על מנת שיוכל לפתח הבנה לגביי המרכיבים ההכרחיים לחשיבה פרופורציונלית.
- במטרה לעזור לתלמיד לחשוב על מצבים שבהם שני גדלים משתנים אחד ביחס לשני, יש להציג השוואות איכותיות לפני שעושים השוואות מספריות או מוצאים נעלם. השוואות אלה יכולות להתחיל בהיגדים כגון: "אם המהירות גבוהה יותר, אז עוברים אותו מרחק בפחות זמן".
- לאחר שהתלמידים מסוגלים לפתור בעיות פרופורציה תוך שימוש בחשיבה לא פורמלית, ניתן לפתח את האסטרטגיות של חשיבה כמותית בקצבי יחידה (Unit Rate) וגורמים מספריים.
- בעיות של יחידות מידה ידועות (כגון: מהירות, הספק) ובעיות הגדלה יש להציג לתלמידים שאינם זקוקים עוד לאמצעי המחשה (כגון: דיאגרמות, מודלים לתיאור החלוקה בתוך הקבוצה וכו').
- מומלץ לעודד מגוון של אסטרטגיות כמותיות על מנת לפתור בעיות עם ערך חסר.

סדנה 1: מתחילים לחשוב פרופורציה

1.

א. דונו בהיגדים שלפניכם. האם הם הגיוניים? מה ההבדל בין ההיגדים ההגיוניים לאילו שאינם הגיוניים?

1) אם שרה יכולה ללכת לביה"ס ב- 10 דקות, אז שרה וורד יכולות ללכת לביה"ס ב- 20 דקות.

2) אם קופסה אחת של דגנים עולה 2.80 דולר, אז שתי קופסאות כאלה של דגנים עולות 5.60 דולר.

3) אם ירון מרכיב דגם של מכונית מרוץ בשעתיים, אז הוא ירכיב שלושה דגמים של מכוניות מרוץ ב- 6 שעות.

4) אם אבנר צובע גדר ביומיים, אז אבנר, תום ואביב יצבעו את הגדר ב- 6 ימים.

5) אם לילדה אחת יש 2 חתולים, אז לארבע ילדות יש 8 חתולים.

מעובד מתוך (Lamon, 1995)

ב. מתי הגיוני השימוש ביחס?

2. ענו על סעיפי א'-ד' לגבי שאלות 1-6:

א. איזה מהקשרים המתוארים בבעיות 1-6 מייצגים קשר פרופורציונאלי? ואיזה מייצגים קשר שאינו פרופורציונאלי? הסבירו.

ב. הציגו פתרונות לשאלות וקבעו באיזו שאלה מתואר יחס ישר ובאיזה לא.

ג. הציגו אסטרטגיות אפשרויות שונות של התלמידים לפתרון בעיות יחס.

ד. האם וכיצד ניתן להשתמש בהיגדים ובשאלות להצגת הנושא בכיתה?

1) ירדן ויעל מקיפות מסלול מעגלי באותה מהירות. ירדן יוצאת לפני יעל. לאחר שירדן השלימה 9 הקפות יעל השלימה 3 הקפות.

כמה הקפות השלימה יעל אם ירדן השלימה 15 הקפות?

(Lamon, 1999)

2) 3 שקי קש שוקלים 21 ק"ג. כמה ק"ג ישקלו 8 שקי קש?

3) עינב יכולה להשלים את צביעת חדרה ב- 4 שעות. בכמה זמן ישלימו עינב ועתליה את צביעת החדר אם הן עובדות באותו קצב?

(Lamon, 1999)

4) כמה שלישים יש בחצי?

5) אם משקלו של אבי - שחקן כדורגל - הוא 85 ק"ג, מה משקלם של 4 שחקנים?

6) רן ויואב הרוויחו 1000 שקלים בעסק החדש. הם מעוניינים לחלק את הרווחים ביניהם ביחס של 2:3. כמה יקבל כל אחד מהם?

פתרונות והנחיות למדריך

מטרת הסדנה: הכרות וזיהוי מצבים שבהם מועיל שימוש ביחס לצורך השוואה, הכרות עם אסטרטגיות פתרון שונות.

1.

א. דונו בהיגדים שלפניכם. האם הם הגיוניים? מה ההבדל בין ההיגדים ההגיוניים לאילו שאינם הגיוניים?

1) אם שרה יכולה ללכת לביה"ס ב- 10 דקות, אז שרה וורד יכולות ללכת לביה"ס ב- 20 דקות.

היגד זה אינו הגיוני. הטעות נעשתה כתוצאה מזיהוי מוטעה של קשר כפלי בין שתי כמויות (מספר הילדות שהולכות, וזמן ההליכה). ברור שאין תלות כפלית ביניהן: זמן ההליכה של הבנות תלוי במהירות הליכתן. בהנחה שמהירותן שווה לזאת של שרה, הרי שיגיעו לביה"ס כעבור 10 דק' מרגע היציאה.

2) אם קופסה אחת של דגנים עולה 2.80 דולר, אז שתי קופסאות כאלה של דגנים עולות 5.60 דולר.

היגד הגיוני. מחיר של קופסאות הדגנים נמצא ביחס ישר לכמות הקופסאות, ולכן אם נכפיל את הכמות הקופסאות גם המחיר יוכפל.

3) אם ירון מרכיב דגם של מכונית מרוץ בשעתיים, אז הוא ירכיב שלושה דגמים של מכוניות מרוץ ב- 6 שעות.

ההיגד הגיוני. כמות העבודה המתבצעת פרופורציונאלית לזמן העבודה (הספק) ונמצאת ביחס ישר לו. לכן אם תגדל העבודה פי שלושה יגדל גם זמן ביצוע העבודה פי שלושה.

4) אם אבנר צובע גדר ביומיים, אז אבנר, תום ואביב יצבעו את הגדר ב- 6 ימים.

ההיגד לא הגיוני. לא יתכן שתוספת כוח אדם מגדילה את כמות הזמן הדרושה לסיום העבודה. ההספק (כמות העבודה שהושלמה) תלוי בשני גורמים: קצב עבודה וזמן. וניתנת לייצוג באופן הבא:

זמן · קצב = הספק

קצב העבודה במקרה זה מחושב על ידי מכפלת מספר העובדים בקצב של עובד אחד (בהנחה שהעובדים עובדים באותו קצב). נשים לב כי היחס בין קצב העבודה לזמן העבודה (עבור אותו הספק) הוא יחס הפוך, ולכן ככל שהקצב יעלה (מספר העובדים יעלה) יקטן הזמן הנדרש לביצוע השלמת העבודה.

הערה: לאחר פתרון שאלה 4 כדי לדון בהבדלים שבין השאלות 3 ו-4.

5) אם לילדה אחת יש 2 חתולים, אז לארבע ילדות יש 8 חתולים.

ההיגד לא הגיוני. בין כמות החתולים לכמות הילדות אין קשר פרופורציונאלי.

ב. מתי השימוש ביחס הגיוני?

ההיגדים שסומנו כהיגדים הגיוניים הם היגדים שבהם קיים קשר פרופורציונאלי בין הכמויות, והשימוש בקשר זה נעשה בהתאם לסוג הקשר (יחס ישר או יחס הפוך).

מעובד מתוך (Lamon, 1995)

---

2. ענו על סעיפי א'-ד' לגבי שאות 1-6:

א. איזה מהקשרים המתוארים בבעיות 1-6 מייצגים קשר פרופורציונאלי? ואיזה מייצגים קשר שאינו פרופורציונאלי? הסבירו.

ב. הציגו פתרונות לשאלות וקבעו באיזו שאלה מתואר יחס ישר ובאיזה לא.

ג. הציגו אסטרטגיות שונות אפשריות של התלמידים לפתרון בעיות יחס.

ד. האם וכיצד ניתן להשתמש בהיגדים ובשאלות להצגת הנושא בכיתה?

1) ירדן ויעל מקיפות מסלול מעגלי באותה מהירות. ירדן יוצאת לפני יעל. לאחר שירדן השלימה 9 הקפות יעל השלימה 3 הקפות. כמה הקפות השלימה יעל אם ירדן השלימה 15 הקפות? (Lamon, 1999)

הקשר המתואר בשאלה זו אינו פרופורציונאלי. ירדן ויעל מקיפות את המסלול באותה מהירות. אם שתיהן יצאו באותו זמן, הן ישלימו את אותו מספר הקפות. לפי נתוני השאלה אפשר להסיק שזמני היציאה של הבנות שונה ולכן כשירדן השלימה שש הקפות יעל החלה לרוץ. מכאן שהפער של 6 סיבובים יישמר ולכן בעת שירדן משלימה 15 הקפות יעל משלימה $15-6=9$ כלומר 9 הקפות.

נוח להציג את הפתרון הטבלה הבאה:

מספר ההקפות שירדן השלימה	מספר ההקפות שיעל השלימה
9	3
10	4
11	5
12	6
13	7
14	8
15	9

הערה: יש לשים לב ליחס בין מספר ההקפות של ירדן לזה של יעל, כדי לראות שאינו קבוע. חיזוק נוסף לכך שיחס זה אינו יחס ישר נוכל לקבל על ידי הרחבה של הטבלה והתבוננות בשני חלקי הטבלה:

מספר ההקפות שירדן השלימה	מספר ההקפות שיעל השלימה
6	0
7	1
8	2
9	3

התבוננות בחלקה הראשון של הטבלה מבהיר את העובדה שכאשר יעל יצאה לדרך ירדן השלימה כבר 6 סיבובים. אם נבנה פונקציה המתארת את הקשר בין מספר ההקפות שמשלימה ירדן (y) למספר ההקפות שמשלימה יעל (x) נקבל: $y=1\cdot x+6$ פונקציה זו לא מתארת יחס ישר.

---

2) 3 שקי קש שוקלים 21 ק"ג. כמה ק"ג ישקלו 8 שקי קש?

הקשר בין מספר השקים למשקל השקים הוא פרופורציונאלי ומתאר יחס ישר. נשתמש בעובדה זו ונמצא את משקלו של שק אחד על ידי חלוקת המשקל במספר השקים ונקבל ששק אחד שוקל 7 ק"ג. מכאן שמשקלם של 8 שקים יהיה 56 ק"ג ($7\cdot 8=56$).

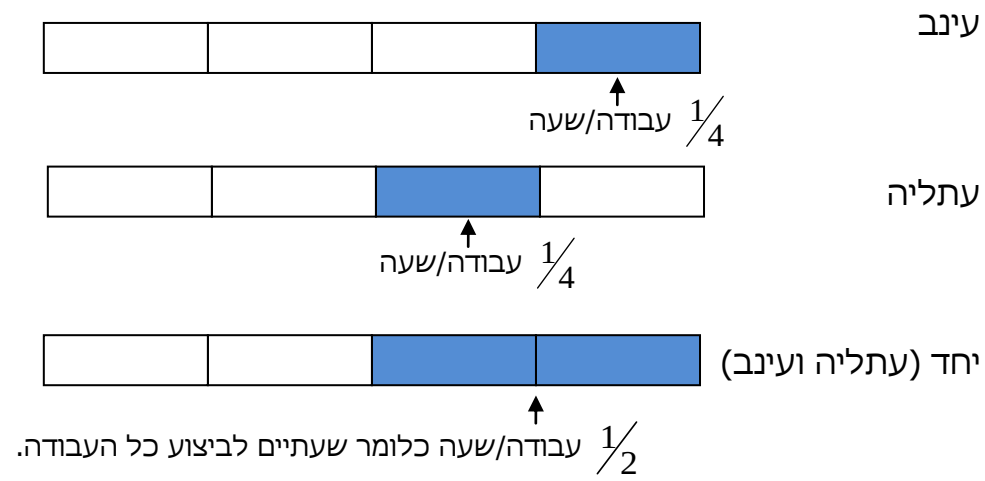
הערה: לדרכי פתרון ואסטרטגיות פתרון נוספות ראה שאלה 1 בסדנה 2.

---

3) עינב יכולה להשלים את צביעת חדרה ב- 4 שעות. בכמה זמן ישלימו עינב ועתליה את צביעת החדר אם הן עובדות באותו קצב?
(Lamon, 1999)

הקשר בין הזמן הנדרש להשלמת עבודה נתונה לבין מספר האנשים המבצעים אותה הוא קשר פרופורציונאלי ומתאר יחס הפוך.

השרטוט הבא מתאר אפשרות לפתרון: השלם מייצג את 4 השעות הדרושות לביצוע של כל העבודה על ידי עינב לבד.



באופן דומה ניתן למצוא כיצד ישתנה זמן הביצוע להשלמת העבודה אם מספר האנשים המבצעים אותה (בהנחה שכולם עובדים בקצב זהה) ישתנה. כך למשל שלושה אנשים יבצעו את העבודה בשליש מהזמן שלוקח לעובד אחד להשלים את העבודה כלומר שליש מ- 4 שעות (שעה ושליש השעה = שעה ו- 20 דקות). ומכאן שניתן לייצג את הקשר על ידי הפונקציה: $y=\frac{4}{x}$ כאשר y מייצג את כמות הזמן שלוקח ל- x אנשים להשלים את העבודה. חשוב לשים לב כי הביטוי $\frac{4}{x}$ אינו מייצג 4 שעות לאדם, אלה הביטוי $\frac{4}{x}$ מייצג 4 שעות ל- x אנשים.

סידור הנתונים בטבלה עשוי לסייע לנו בניתוח הסיטואציה:

x - מספר אנשים	y - מספר השעות להשלמת העבודה	xy
1	4	4
2	2	4
3	$\frac{4}{3}$	4
4	1	4
5	$\frac{4}{5}$	4
6	$\frac{2}{3}$	4

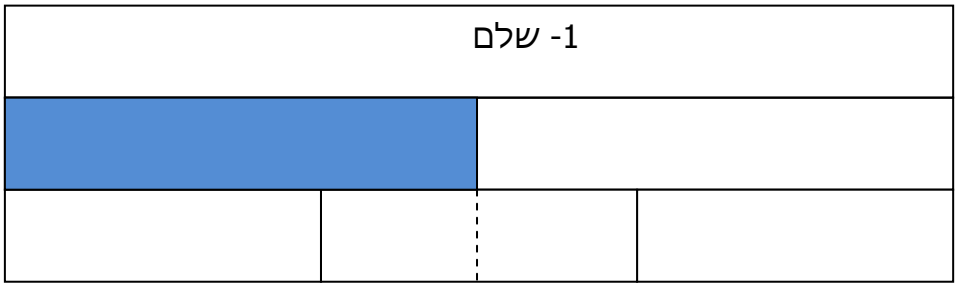
---

4) כמה שלישים יש בחצי?

הקשר מתואר בשאלה זו הוא קשר פרופורציונאלי ביחס הפוך בין גודל החלק למספר החלקים שנכנסים לחצי.

בשאלה זו גודל החלק הוא שליש. יש למצוא את מספר החלקים שיכנסו בגודל נתון קבוע - בשאלה זו חצי.

נדגים את הפתרון בעזרת הדיאגרמה הבאה:



אם x מייצג את גודל החלק (בשאלה זו שליש) ו- y את מספר החלקים הנכנסים בגודל הנתון, הרי שניתן לייצג את הקשר בין המשתנים על ידי

המשוואה $\frac{1}{3}\cdot y=\frac{1}{2}$. מכאן שאם הגודל של החלק יגדל הרי שנצפה לקבל פחות חלקים כאלה שיכנסו בגודל הקבוע (בשאלה זו – חצי).

היעזרו במודל הנתון או בקשר שמצאתם וחשבו:

כמה פעמים $\frac{3}{4}$ נכנס בחצי? מה נשאר קבוע? מה משתנה?

---

5) אם משקלו של אבי - שחקן כדורגל הוא 85 ק"ג, מה משקלם של 4 שחקנים?

הקשר המתואר בשאלה זו בין כמות האנשים למשקלם אינו פרופורציונאלי. ולכן הידיעה כי משקלו של אבי הוא 85 ק"ג אינה מאפשרת לדעת את משקלם הכולל של ארבעת השחקנים, אלא אם ידוע המשקל של כל אחד מהם.

---

6) רן ויואב הרוויחו 1000 שקלים בעסק החדש. הם מעוניינים לחלק את הרווחים ביניהם ביחס של 2:3. כמה יקבל כל אחד מהם?

ממבנה השאלה ניתן להבין כי הקשר המתואר בין סכום הכסף שהרוויח כל אחד מהמשקיעים לבין יחס ההשקעה הוא פרופורציונאלי ומתאר יחס ישר.

ניתן לפתור את השאלה בצורה אלגברית באופן הבא:

$2x$ – סכום הכסף המגיע לרן

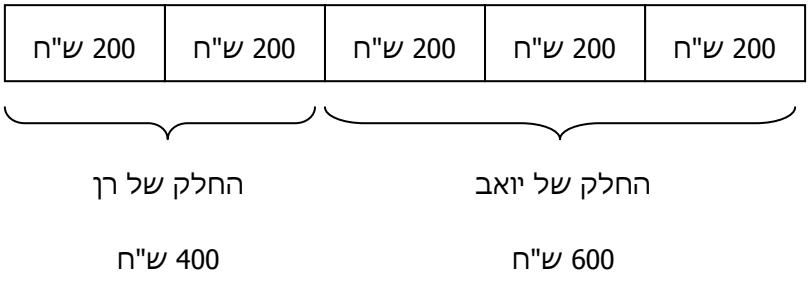
$3x$ – סכום הכסף המגיע ליואב

ונקבל:

$$2x+3x=1000$$
$$5x=1000$$
$$x=200$$

כלומר לרן מגיע 400 שקלים וליואב 600 שקלים. נשים לב x בשאלה זו מייצג את גורם היחס.

דרך אחרת היא ייצוג השלם המחולק לחמישה חלקים:



אפשרות נוספת:

נתבונן כיצד יחלקו ביניהם רן ויואב 5 שקלים.

רן	רן	יואב	יואב	יואב

כלומר על כל 2 שקלים שיקבל רן יקבל יואב 3 שקלים. חלוקה של הסכום (1000) ב- 5 שקלים תיתן 200 המייצגים את סך כל הקבוצות של חמישה שקלים.

נכפול את מספר הקבוצות שקיבלנו במספר השקלים שרן מקבל מתוך 5 שקלים ונקבל ($2\cdot 200=400$) את סכום הכסף שתניב השקעתו. באופן דומה נקבל שהשקעתו של יואב תניב 600 שקלים ($3\cdot 200=600$).

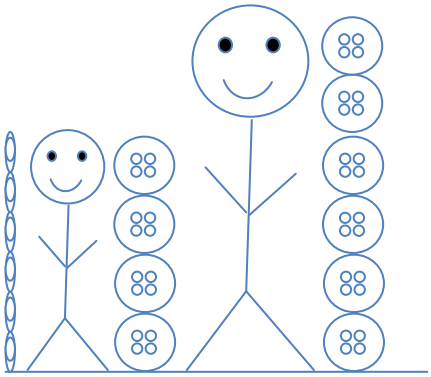
סדנה 2: סוגי שאלות ואסטרטגיות פתרון

הוראות:

א. קראו את ארבע השאלות. הציעו לכל שאלה דרכי פתרון רבות ככל האפשר.

ב. הציעו דרך למיין את השאלות לסוגים (דרך הפתרון, סוג פתרון, מיומנויות חשיבה...) והוסיפו לכל סוג שאלה נוספת.

1. כאשר משתמשים בכפתורים למדידת גובה, גובהו של מר קצר הוא 4 כפתורים וגובהו של מר גבוה הוא 6 כפתורים.
כאשר משתמשים באטבים לנייר למדידת הגובה, גובהו של מר קצר הוא 6 אטבים.
מהו גובהו של מר גבוה באטבים? הסבירו.
מעובד מתוך (Karplus & Peterson, 1970)



2. מירי וטלי מכינים לימונדה. מירי מערבבת בכד 8 כפות לימון עם 64 מ"ל של מים. טלי מערבבת בכד 12 כפות לימון עם 128 מ"ל מים. באיזה כד טעם הלימון חזק יותר?

3. אם טלי משתמשת היום בארבע כפות נוספות של לימון לצורך הכנת אותה כמות לימונדה כמו שהכינה אתמול, הלימונדה שלה תהייה היום:



א. בעלת טעם חזק יותר של לימון

ב. בעלת טעם חלש יותר של לימון

ג. בעלת טעם זהה לזו שהוכנה אתמול

4. בכל אחת מהבעיות הבאות מוצגים שני קנקני קפה ומצוין באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר. בכל בעיה מתואר שינויי מסוים הקורה בקנקנים, כגון: הוספת כוס מים או הוספת כפית גדושה של קפה. המטרה היא לזהות, אם אפשר, באיזה מקנקני הקפה טעם הקפה חזק יותר לאחר ביצוע השינוי.

א. טעמו של הקפה בקנקן A חזק מטעמו של הקפה בקנקן B.

מוסיפים לקנקן A כף קפה ולקנקן B 3 כוסות מים.

באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר?



קנקן A קנקן B

ב. טעמו של הקפה בקנקן A ובקנקן B זהה.

מוסיפים לקנקן A ולקנקן B כף קפה.

באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר?



קנקן A קנקן B

ג. טעמו של הקפה בקנקן A חלש מטעמו של הקפה בקנקן B.

מוסיפים לשני הקנקנים כף קפה.

באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר?



קנקן A　　קנקן B

ד. טעמו של הקפה בקנקן B חזק מטעמו של הקפה בקנקן A.

מוסיפים לקנקן A כף קפה וכוס מים לקנקן B.

באיזה קנקן טעמו של הפה חזק יותר?



קנקן A　　קנקן B

מעובד מתוך (Billing, 2002).

פתרונות והנחיות למדריך

מטרת הסדנה: מיון שאלות, ניתוח דרכי פתרון והכרת אסטרטגיות פתרון שונות בנושא יחס ופרופורציה.

הידע הנדרש: יחס ישר, פרופורציה, חישובי פרופורציה.

השאלות בסדנה זו יכולות לשמש כמשימות הערכה בנושא יחס ופרופורציה אותן ניתן למיין לשאלות שבהן נדרשת תשובה מספרית ולשאלות שבהן נדרשת תשובה שאינה מספרית. למרות שהאחרונות אינן מצריכות תשובה מספרית, חוקרים (Cramer & post, 1993, billing, 2002) מצביעים על חשיבותן הרבה בבניית השלב המקדים לשלב החישובים. חשיבות זו בא לידי ביטוי ביכולת התלמיד לבחון את מידת ההיגיון שבתשובותיו. בנוסף אפשר להציע חלוקה פנימית של שני סוגי השאלות ל:

א. שאלות בהן נדרש חישוב מספרי של גורם חסר. בשאלות אלה ידוע ערכם של שלושה גורמים ויש לחשב את ערכו של הרביעי. לדוגמה: יעל וענבל מקיפות באותו קצב מסלול מעגלי. יעל משלימה 5 סיבובים ב- 8 דקות. בכמה זמן תשלים ענבל 7 סיבובים.

ב. שאלות בהן נדרשת השוואה מספרית- לדוגמה: מכונית א' צורכת 16 ליטר דלק בנסיעה של 168 ק"מ, מכונית ב' צורכת 22 ליטר דלק בנסיעה של 187 ק"מ. איזו מכונית יותר חסכונית?

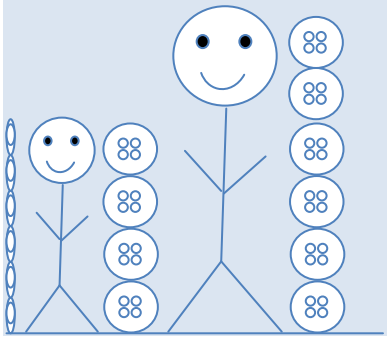
ג. שאלות הדורשות ניבוי (איכותי). לדוגמה: בכל יום מכין יואב קנקן פטל לפי מתכון קבוע. ביום שבת הכין יואב קנקן פטל אך שינה את המתכון הרגיל ע"י הוספה של שתי כפות תרכיז פטל. האם כתוצאה משינוי זה צבעו של הפטל בקנקן יהיה חלש, חזק או לא השתנה ביחס לצבעו?

ד. שאלות בהן נדרשת השוואה שאינה מספרית (איכותית). לדוגמה: חגית וענבל מתכננות לשתול פרחים בשורות. חגית מתכננת לשתול בשורה הראשונה יותר פרחים ממה שמתכננת לשתול ענבל בשורה הראשונה. השורה הראשונה של חגית קצרה יותר מהשורה הראשונה של ענבל. הפרחים של מי מבין השתיים יהיו צפופים יותר?

ה. הצעה נוספת: ניתן לבצע את אותה פעילות על שאלות מתוך ספר הלימוד.

הצעה לפתרון השאלות:

1. כאשר משתמשים בכפתורים למדידת גובה, גובהו של מר קצר הוא 4 כפתורים וגובהו של מר גבוה הוא 6 כפתורים.
כאשר משתמשים באטבים לנייר לצורך מדידת הגובה, גובהו של מר קצר הוא 6 אטבים.
מהו גובהו של מר גבוה באטבים? הסבירו.
מעובד מתוך (Karplus & Peterson, 1970)



דרך א' (פרופורציה) נכתוב את היחס הצורה הבאה: $\frac{6}{4}=\frac{x}{6}$.
מכאן גובהו של מר ארוך באטבים הוא $x=6\cdot 6:4=9$ אטבים.

דרך ב' (קיבוץ יחידות) מהיחס הנתון ניתן לראות כי כל שני כפתורים (יחידת הקיבוץ) שווים באורכם לשלושה אטבים. אורכו של מר ארוך הוא שישה כפתורים כלומר נקבל 3 קבוצות של שני כפתורים שכל אחת מהן שווה באורכה ל- 3 אטבים ומכאן שגבהו של מר ארוך הוא 9 אטבים $\left(\frac{6}{2}\cdot 3=9\right)$.

דרך ג' (ערך משולש) נסדר את הנתונים באופן הבא:

	מספר כפתורים	מספר אטבים
מר קצר	4	6
מר ארוך	6	?

ומכאן שנקבל: $6\cdot 6:4=9$

דרך ד' (פונקציית יחס ישר): היחס בין מספר הכפתורים למספר האטבים קבוע ושווה ל- $\frac{3}{2}$ ולכן ניתן לייצוג על ידי הפונקציה: $y=\frac{3}{2}x$ כאשר x מייצג את הכפתורים ו- y את האטבים. נציב $x=6$ בפונקציה ונקבל: $y=\frac{3}{2}\cdot 6=9$.

---

2. מירי וטלי מכינים לימונדה. מירי מערבבת בכד 8 כפות לימון עם 64 מ"ל של מים. טלי מערבבת בכד 12 כפות לימון עם 128 מ"ל מים. באיזה כד טעם הלימון חזק יותר?

דרך א': נייצג בעזרת שבר את היחס בין הלימון למים בלימונדה של כל אחת מהבנות.

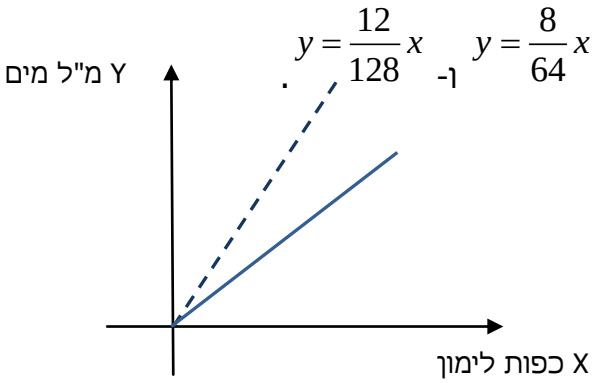
יחס הלימון למים בלימונדה של מירי הוא $\frac{8}{64}$.

יחס הלימון למים בלימונדה של טלי הוא $\frac{12}{128}$ או בצורתו המצומצמת $\frac{3}{32}$.

על מנת לקבוע באיזו לימונדה טעם הלימון חזק יותר עלינו לבדוק איזה שבר גדול יותר. $\frac{3}{32}=\frac{6}{64}$, $\frac{6}{64}<\frac{8}{64}$. מכאן נסיק שבלימונדה של טלי טעם הלימון חזק יותר.

דרך ב': נפח המים בלימונדה של טלי גדול פי 2 מנפח המים בלימונדה של מירי. לפי המתכון של מירי בלימונדה של טלי אמור להיות 16 כפות לימון, כאשר למעשה יש רק 12 כפות לימון. מכאן נסיק שבלימונדה של טלי טעם הלימון חזק יותר.

דרך ג': (פונקציית יחס ישר) היחס בין כמות הלימון לכמות המים בכל לימונדה הוא קבוע ולכן ניתן לייצג את היחסים בין כמות הלימון למים בכל אחת מהלימונדות ע"י הפונקציות: $y=\frac{8}{64}x$ ו- $y=\frac{12}{128}x$.



שרטוט שתי הפונקציות באותה מערכת צירים מראה כי הגרף המתאר את הלימונדה של מירי (הקו המקווקו) בעל שיפוע גדול יותר (תלול יותר) מהגרף המתאר את הלימונדה של טלי (הקו הרציף). היות ושיפוע הישר מתאר את היחס בין כמות הלימון לכמות המים הרי שהישר התלול יותר מייצג את הלימונדה שי בה יותר לימון.

---

3. אם טלי משתמשת היום בארבע כפות נוספות של לימון לצורך הכנת אותה כמות לימונדה כמו שהכינה אתמול, הלימונדה שלה תהייה היום:



א. בעלת טעם חזק יותר של לימון?

ב. בעלת טעם חלש יותר של לימון?

ג. בעלת טעם זהה לזו שהוכנה אתמול?

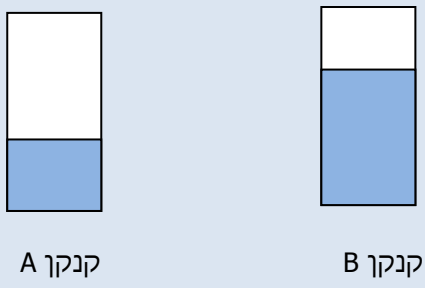
הכמות הכוללת של הלימונדה אינה משתנה אך לאותה כמות מתווספות שתי כפות לימון ומכאן שריכוז הלימונדה החדשה יגדל כלומר היא תהיה בעלת טעם חזק יותר של לימון.

---

4. בכל אחת מהבעיות הבאות מוצגים שני קנקני הקפה ומצוין באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר. בכל בעיה מתואר שינויי מסוים הקורה בקנקנים, כגון:

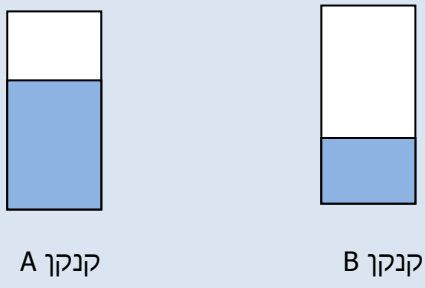
הוספת כוס מים או הוספת כפית גדושה של קפה. המטרה היא לזהות, אם אפשר, באיזה מקנקני הקפה טעם הקפה חזק יותר לאחר ביצוע השינוי.

א. טעמו של הקפה בקנקן A חזק מטעמו של הקפה בקנקן B.
מוסיפים לקנקן A כף קפה ולקנקן B 3 כוסות מים.
באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר?



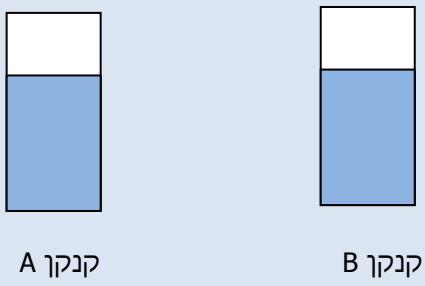
טעם הקפה בקנקן A חזק יותר. הקפה בקנקן B היה מלכתחילה חלש יותר, בעקבות השינוי נוספו לו עוד מים - פעולה שהובילה לירידה בריכוז הקפה בו. לפי נתוני ההתחלה בקנקן A ריכוז הקפה היה חזק יותר מריכוזו בקנקן B ופעולת הוספת הקפה הובילה לעליה בריכוזו.

ב. טעמו של הקפה בקנקן A ובקנקן B זהה.
מוסיפים לקנקן A ולקנקן B כף קפה.
באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר?



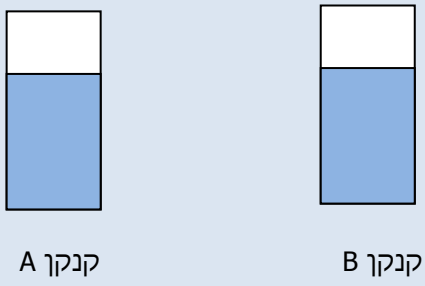
טעם הקפה בקנקן B חזק יותר. במקרה זה נפח הקפה הינו מרכיב הכרחי בקביעת הקשר שבין הוספת הקפה לבין חוזק טעמו של הקפה. היות ובהתחלה לשניהם אותו טעם, הרי שלשניהם אותו יחס של קפה למים. ולכן אם מוסיפים כפית אחת לכל קנקן, אז בקנקן A שנפח הקפה בו גדול יותר, יהיה דליל יותר. בקנקן B לעומת זאת נפח הקפה קטן יותר ולכן ריכוזו יהיה חזק יותר.

ג. טעמו של הקפה בקנקן A חלש מטעמו של הקפה בקנקן B.
מוסיפים לשני הקנקנים כף קפה.
באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר?



טעם הקפה בקנקן B חזק יותר. מכיוון שאותה כמות קפה נוספה לשני הקנקנים המכילים נפח זהה של קפה, ריכוז הקפה בקנקן B שהיה מלכתחילה חזק יותר יעלה בעקבות השינוי.

ד. טעמו של הקפה בקנקן B חזק מטעמו של הקפה בקנקן A.
מוסיפים לקנקן A כף קפה וכוס מים לקנקן B.
באיזה קנקן טעמו של הפה חזק יותר?



לא ניתן לקבוע באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר. מכיוון שאיננו יודעים עד כמה חזק הקפה בקנקן B אי אפשר לקבוע כיצד ישפיע השינוי על חוזקו של הקפה בקנקנים. לדוגמה אם קנקן A מכיל בתחילה כף קפה ו- 8 כוסות מים וקנקן B מכיל 2 כפות קפה ו- 8 כוסות מים. לאחר השינוי הקפה בקנקן A יהיה חזק יותר מהקפה בקנקן B (כף אחת ל- 4 כוסות מים לעומת כף קפה אחת ל- 4.5 כוסות מים). לעומת זאת אם קנקן A יכיל בהתחלה כף קפה ו- 4 כוסות מים וקנקן B יכיל 3 כפות קפה על 3 כוסות מים, לאחר השינוי הקפה בקנקן B יהיה חזק יותר מהקפה בקנקן A (כף אחת של קפה ל- 4 כוסות מים לעומת כף קפה אחת ל- 3.5 כוסות מים).

סדנה 3: על תנאים לדמיון משולשים ומרובעים

1. קבעו איזו מבין הטענות הבאות נכונה. נמקו.

- אם שתי צורות דומות אז הן בהכרח חופפות.
- אם שתי צורות חופפות אז בהכרח הן דומות.

---

2. הגדירו:

- מרובעים דומים
- מצולעים דומים

---

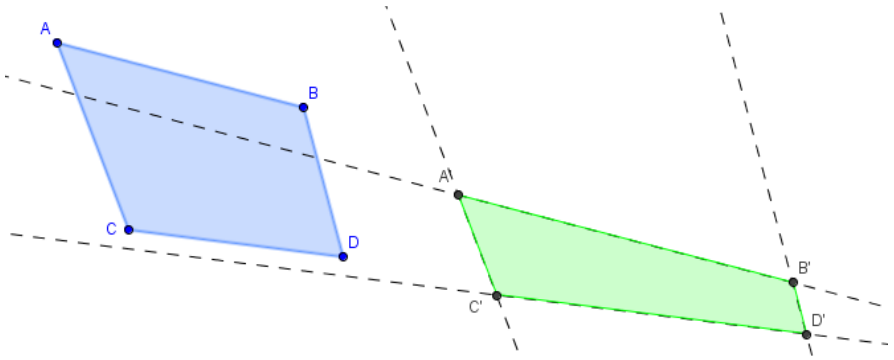
3. לפניכם שני מרובעים $ABCD$ ו- $A'B'C'D'$. צלעותיו של המרובע $A'B'C'D'$ מקבילות לצלעות המרובע $ABCD$.

הביאו נימוקים המסתמכים על הבנייה **והיישומון של בניית מרובעים דומים** ובדקו:

א. האם המרובעים שווים בזוויותיהם? (הדגימו גם ע"י שימוש ביישומון- הזזה של $ABCD$).

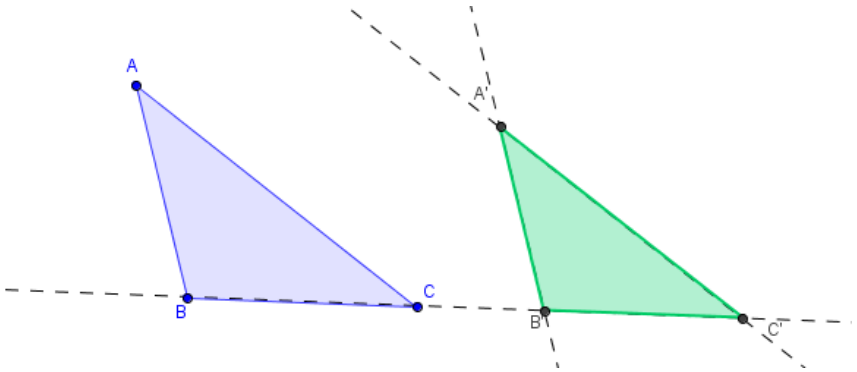
ב. האם המרובעים הללו דומים?

ג. כתבו מסקנה המתייחסת לסעיפים א'-ב'.



---

4. נבנה שני משולשים כך צלעותיו של משולש אחד יהיו מקבילות לצלעותיו של המשולש השני.



הביאו נימוקים המסתמכים על הבנייה **והיישומון משולשים דומים** ובדקו:

א. האם המשולשים שווים בזוויותיהם? (הדגימו גם ע"י שימוש ביישומון- הזזה של ΔABC).

ב. האם המשולשים דומים?

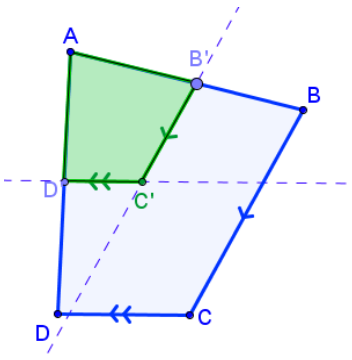
ג. האם טענה הבאה נכונה: שני משולשים השווים בזוויותיהם, דומים. אם כן - הוכיחו.

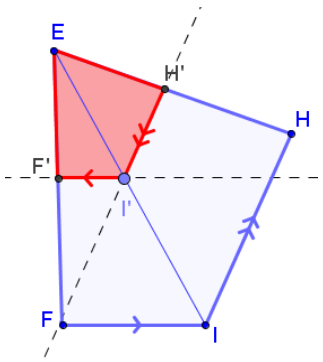
---

5. התייחסו להוכחות ולמסקנות שקיבלתם בשאלות 2-3 והסבירו ממה נובעים ההבדלים.

---

6. **<u>ביישומון בניית מרובעים</u>** הבא מוצגים שני מרובעים $ABCD$ ו- $EFIH$ שבכל אחד מהם נבנה מרובע קטן (פנימי) השווה בזוויותיו למרובע הגדול (החיצוני).





א. היעזרו ביישומון ותארו את הבניה בכל אחד מהמרובעים.

ב. האם צלעות המרובע $ABCD$ פרופורציונאליות לאלה של $A'B'C'D'$?

אם כן, נמקו.

אם לא, האם אפשר לשנות את המרובע $ABCD$ כך שצלעותיו יהיו פרופורציונאליות למרובע $A'B'C'D$?

ג. מדוע הצלעות של המרובע $EFIH$ ושל $EF'I'H'$ פרופורציונאליות?

---

7. לפניכם שלוש טענות. קבעו לגבי כל טענה האם היא נכונה או לא.
אם הטענה לא נכונה הביאו (או בנו בעזרת ה- geogebra) דוגמה נגדית.
אם הטענה נכונה, נמקו.

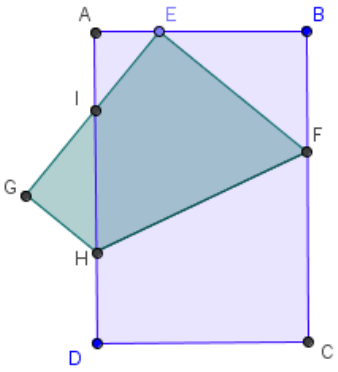
1) שני מרובעים השווים בזוויותיהם, דומים.

2) שני מרובעים שצלעותיהם פרופורציונאליות, דומים.

3) שני מרובעים השווים בזוויותיהם וכל צלעותיהם פרופורציונאליות, דומים.

---

8. על דף נייר מלבני בגודל כלשהו סמנו נקודה כלשהי (E) על אחת הצלעות (AB), קפלו את הנייר כך שאחת משתי הפינות (C בציור, אך אפשר גם D) הנמצאות על הצלע הנגדית לצלע שעליה סימנתם נקודה, תתלכד עם הנקודה שסימנתם (ראה ציור).



א. מצאו צורות חופפות, נמקו.

ב. מצאו זוגות של משולשים דומים, נמקו. השתמשו בזויות ובצלעות על מנת להוכיח טענתכם.

ג. השוו את התוצאות שקיבלתם עם התוצאות של שאר חברי הצוות. במה הבחנתם?

האם תשובתכם לסעיף ב' תשתנה אם תבחרו נקודה אחרת על הצלע AB? הסבירו. היעזרו **ביישומון קיפולי הנייר**.

פתרונות והנחיות למדריך

מטרת הסדנה: לבחון את ההבדלים בין תנאים מספיקים והכרחיים לדמיון משולשים לעומת אלה של דמיון מרובעים. בנוסף מספקת הסדנה התנסות בבניות גיאומטריות תוך שימוש בכלי טכנולוגי.

הידע הנדרש: חפיפת משולשים, ישרים מקבילים, דימיון משולשים, משפט תלס, דמיון מצולעים.

דרכי הפעלה: עבודה בזוגות.

הערות והמלצות לארגון הסדנה: שאלה מס' 1 היא שאלת פתיחה כללית לנושא הדמיוץ מומלץ לפתוח בה את הסדנה במטרה לעמוד על השוני בין השימוש במילה דמיון בשפה המתמטית לשימוש במילה זו בשפת היום יום. שאלה 2 היא שאלת פתיחה לסדנה ובשלב זה חשוב לתת למורים לכתוב את ההגדרה שלהם ולא לדון בהגדרות שכתבו (ההתייחסות לכך תגיע מאוחר יותר). שאלות 5-3 מתמקדות בהבדלים שבין התנאים המספיקים לדמיון משולשים לבין אלה הנדרשים לדמיון מרובעים. שאלות 7-6 קשורות לדמיון מרובעים. הן מתמקדות בבניות של מרובעים דומים וביצירת דוגמאות נגדיות המדגימות את הצורך בקיומם של שני התנאים לדמיון מרובעים. שאלות 7-6 מהוות המשך טבעי לשאלות 5-3 אך ניתן לענות עליהן גם ללא תלות בשאלות 5-3. את הרעיון בשאלה 8 ניתן לעבד לפעילות כיתתית.

הצעה לפתרון:

1. קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה. נמקו.
   - אם שתי צורות הן דומות אז הן בהכרח חופפות.

לא. רק אם יחס הדמיון הוא 1:1.

   - אם שתי צורות הן חופפות אז בהכרח הן דומות.

כן. כל הזויות שוות, כל הצלעות שוות, לכן הפרופורציה בינהן היא 1:1.
צורות חופפות הן צורות שיחס הדמיון בינהן שווה ל-1.

2. הגדירו:

- מרובעים דומים

שני מרובעים שזויותיהם שוות בהתאמה וצלעותיהם פרופורציונליות נקראים מרובעים דומים.

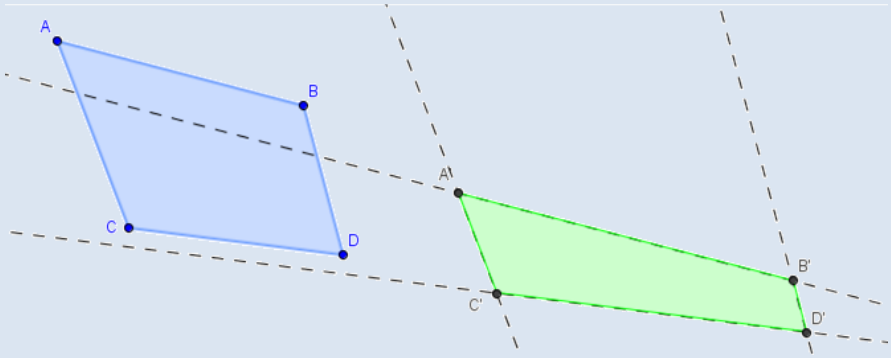
- מצולעים דומים

שני מצולעים שזויותיהם שוות בהתאמה וצלעותיהם המתאימות פרופורציונלית נקראים מצולעים דומים.

---

3. לפניכם שני מרובעים $ABCD$ ו- $A'B'C'D'$. צלעותיו של המרובע $A'B'C'D'$ מקבילות לצלעות המרובע $ABCD$.

הביאו נימוקים המסתמכים על הבנייה **<u>והיישומון של בניית מרובעים דומים</u>** ובדקו:



א. האם המרובעים שווים בזוויותיהם? (הדגימו גם ע"י שימוש ביישומון- הזזה של $ABCD$).

המרובעים $ABCD$ ו- $A'B'C'D'$ שווים בזוויותיהם.

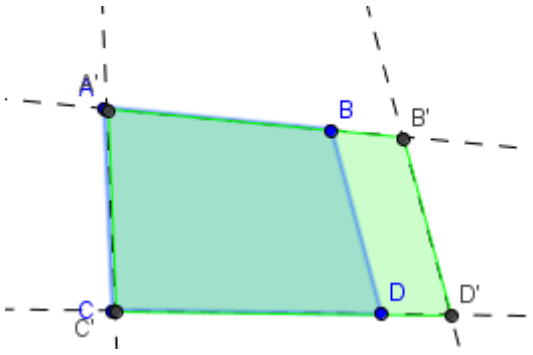
הוכחה 1: (הוכחה אינטואיטיבית) - ע"י הזזה של המרובע $ABCD$ על-גבי המרובע $A'B'C'D'$ והצגת שוויון הזוויות על-ידי כיסוי וחפיפה של הזוויות בהתאמה.

הוכחה 2: (הוכחה דדוקטיבית)

לפי הבניה: $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $CD \parallel C'D'$, $BD \parallel B'D'$.

שתי זוויות, שהקרניים שלהן מקבילות בהתאמה שוות זו לזו. מכאן מתקיים: $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CDB = \angle C'D'B'$, $\angle DBA = \angle D'B'A'$

ב. האם המרובעים הללו דומים?



נזיז את המרובע $ABCD$ על גבי מרובע $A'B'C'D'$ כך שהצלע AB תונח על הצלע $A'B'$. נזיז את הנקודות A ו- B עד להתלכדות עם הנקודות A' ו- B', כך שמתקיים: $AB = A'B'$ (ראה ציור).

לפי בנייה זו יש זוג צלעות שהיחס בין האורכים שלהם הוא 1. מכאן כדי שהצורות יהיו דומות, גם היחס בין האורכים של שאר הצלעות צריך להיות שווה ל- 1. כלומר כל הצלעות צריכות להיות שוות באורכן ולמעשה המרובעים צריכים לחפוף. מתוך הבנייה קיבלנו בברור כי $AB \neq A'B'$ וגם $CD \neq C'D'$.

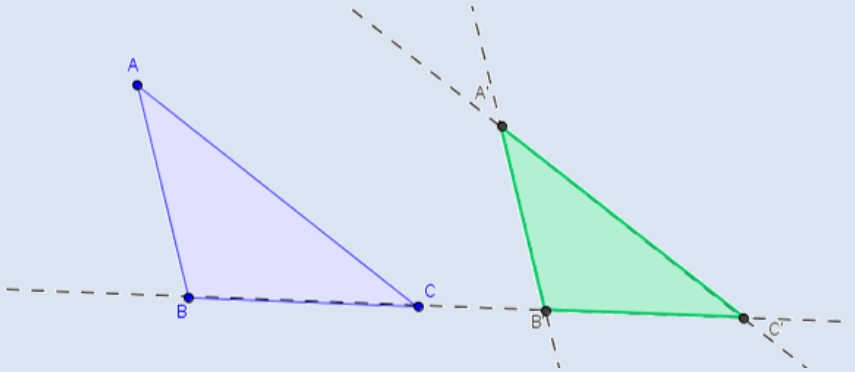
ולכן המרובעים אינם דומים.

ג. כתבו מסקנה המתייחסת לסעיפים א'-ב'.

הדוגמה שהוצגה בסעיף ב' משמשת כדוגמת נגדית לטענה שמרובעים השווים בזוויותיהם הם בהכרח דומים, ולכן המסקנה המתבקשת היא **ששוויון זוויות** של שני **מרובעים** הוא **אינו תנאי מספיק** לדמיון המרובעים.

---

4. נבנה באותו אופן שני משולשים כך צלעותיו של משולש אחד יהיו מקבילות לצלעותיו של המשולש השני.



הביאו נימוקים המסתמכים על הבנייה ו**<u>היישומון משולשים דומים</u>** ובדקו:

א. האם המשולשים שווים בזוויותיהם? (הדגם גם ע"י שימוש ביישומון- הזזה של ΔABC).

המשולשים שווים בשלוש זוויותיהם, דרך ההוכחה דומה לזו של שאלה 3, סעיף א'. המשולשים דומים.

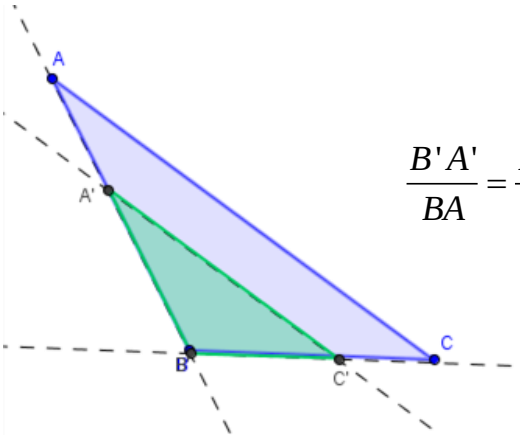
ב. האם המשולשים דומים?

המשולשים דומים.

הוכחה:

נניח את המשולש ABC כך שקדקוד B מתלכד עם קדקוד B'. צלע $A'B'$ תונח על צלע AB (ראה ציור)

מהבנייה $AC \parallel A'C'$



לפי משפט תאלס נקבל: $\frac{B'A'}{BA}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$

ומכאן המשולשים דומים.

ג. האם טענה הבאה נכונה: שני משולשים השווים בזוויותיהם, דומים. אם כן הוכיחו.

הטענה נכונה. שוויון בין זווית הוא תנאי מספיק לדמיון המשולשים.

הוכחה: נבחר שני משולשים השווים בכל זוויותיהם ונניח אותם (הזזה השומרת על גודל), כך שקדקוד אחד של אחד המשולשים תתלכד עם הקדקוד המתאים (על פי שוויון הזוויות) במשולש האחר. מכאן בעזרת שימוש בזוויות מתאימות שוות אנו מגיעים להקבלה של הצלעות הנוספות ובעזרת משפט תאלס מוכיחים פרופורציה בין הצלעות.

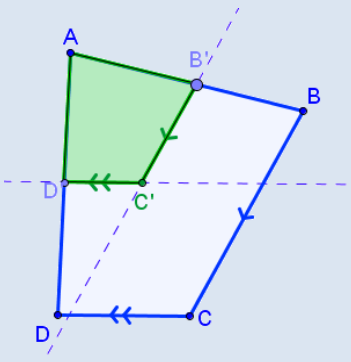
---

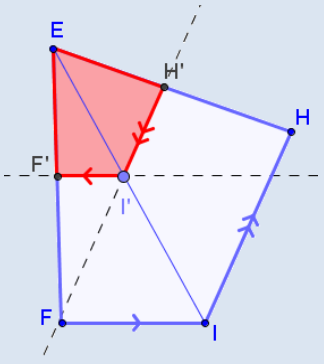
5. התייחסו להוכחות ולמסקנות שקיבלתם בשאלות 2-3 והסבירו ממה נובעים ההבדלים?

המטרה של שאלה זו היא לערוך דיון המתייחס לעליה במספר התנאים המספיקים להוכחת דמיון, במעבר ממשולש למרובע.

---

6. **<u>ביישומון בניית מרובעים</u>** הבא מוצגים שני מרובעים *ABCD* ו- *EFIH* שבכל אחד מהם נבנה מרובע קטן (פנימי) השווה בזוויותיו למרובע הגדול (החיצוני).





א. היעזרו ביישומון ותארו את הבניה בכל אחד מהמרובעים.

הבנייה של מרובע $ABCD$ נעשתה באופן הבא:

- בחירת שתי נקודות B' ו- D' על הצלעות AB ו- AD, בהתאמה.
- דרך הנקודות B' ו- D' מעבירים מקבילים לצלעות BC ו-DC, בהתאמה.

הבנייה מבטיחה כי המרובעים שווי זוויות, אך אינה מבטיחה כי מתקיימת פרופורציה בין צלעותיהם, כי שינוי הנקודה B' משנה את היחס בין AB ל-$A'B'$ אך אינו גורר שינוי ביחס שבין הצלעות AD ו- $A'D'$.

הבנייה של מרובע $EFIH$ נעשתה באופן הבא:

- נבחר נקודה I' על האלכסון EI.
- דרך הנקודה I' מעבירים מקבילים לצלעות HI ו- FI.

הבנייה מבטיחה כי המרובעים שווי זוויות ומתקיימת פרופורציה בין צלעותיהם על סמך המקבילות.

ב. האם צלעות המרובע $ABCD$ פרופורציונאליות לאלה של $AB'C'D'$?
אם כן נמקו.
אם לא, האם אפשר לשנות את המרובע $ABCD$ כך שצלעותיו יהיו פרופורציונאליות למרובע $A'B'C'D$?

כפי שהוסבר בסעיף א', באופן כללי הצלעות של מרובעים אילו אינן פרופורציונאליות.

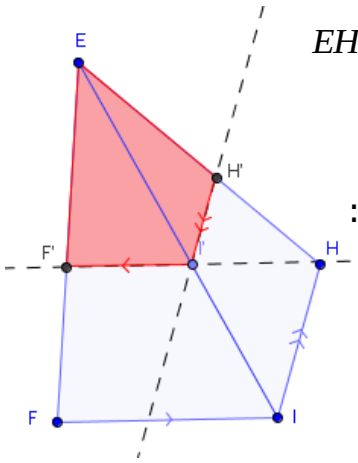
כאשר המרובע $ABCD$ הוא מקבילית ונקודת המפגש של שני המקבילים נמצאת על האלכסון AC מתקיימת פרופורציה בין הצלעות.

שאלה לדיון: האם יש מקרים נוספים?

ג. מדוע הצלעות של המרובע $EFIH$ ושל $EF'I'H'$ פרופורציונאליות?

הוכחה:

מהבנייה נקבל ש: $IH \parallel I'H'$ וגם $FI \parallel F'I'$.



לפי הרחבה של משפט תאלס במשולש EHI מתקיים:

$$\frac{EI'}{EI}=\frac{EH'}{EH}=\frac{I'H'}{IH}$$

לפי משפט תאלס במשולש EFI מתקיים:

$$\frac{EI'}{EI}=\frac{EF'}{EF}=\frac{I'F'}{IF}$$

ומכאן: $$\frac{EI'}{EI}==\frac{I'H'}{IH}=\frac{F'I'}{FI}=\frac{EF'}{EF}$$

---

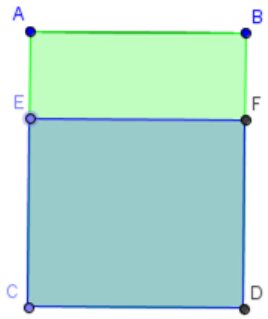
7. לפניכם שלוש טענות. קבעו לגבי כל טענה האם היא נכונה או לא.

אם הטענה לא נכונה הביאו (או בנו בעזרת ה-geogebra) דוגמה נגדית.

אם הטענה נכונה, נמקו.

1) שני מרובעים השווים בזוויותיהם, דומים.

הטענה לא נכונה, דוגמה נגדית:



נבחר שני מלבנים ונניח אותם באופן הבא:

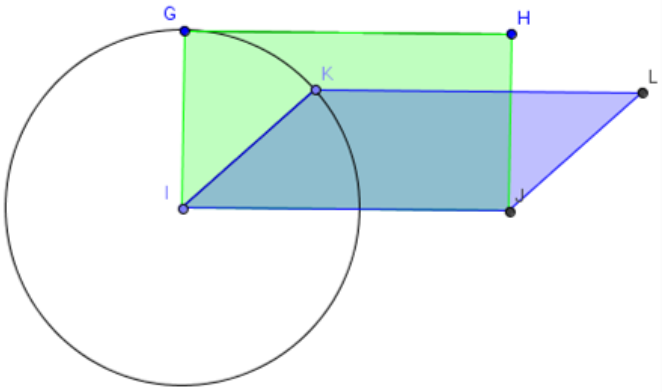
היעזר **<u>ביישומון דוגמאות נגדיות</u>**.

2) שני מרובעים שצלעותיהם פרופורציונאליות, דומים.

הטענה לא נכונה, דוגמה נגדית:

מקבילית ומלבן שצלעותיהם שוות.

היעזר **<u>ביישומון דוגמאות נגדיות</u>**.



3) שני מרובעים השווים בכל זוויותיהם וכל צלעותיהם פרופורציונאליות, דומים.

הטענה נכונה, על פי הגדרת מצולעים דומים.

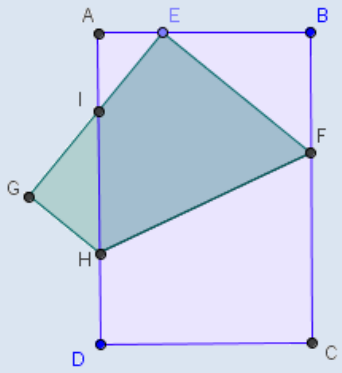
---

8. על דף נייר מלבני בגודל כלשהו סמנו נקודה כלשהי (E) על אחת הצלעות (AB), קפלו את הנייר כך שאחת משתי הפינות (C בציור, אך אפשר גם D) הנמצאות על הצלע הנגדית לצלע שעליה סימנתם נקודה, תתלכד עם הנקודה שסימנתם (ראה ציור).

א. מצאו צורות חופפות, נמקו.

ב. מצאו זוגות של משולשים דומים, נמקו. השתמשו בזויות ובצלעות על מנת להוכיח טענתכם.

ג. השוו את התוצאות שקיבלתם עם התוצאות של שאר חברי הצוות. במה הבחנתם? מה אם? האם תשובתכם לסעיף ב' תשתנה אם תבחרו נקודה אחרת על הצלע AB? הסבירו. היעזרו **<u>ביישומון קיפולי הנייר</u>**.



חופפים	דומים
$DHFC \cong GHFE$ שויון בכל הזויות והצלעות	$\Delta HGI \sim \Delta EAI \sim \Delta FBE$ שויון בשלוש זויות

מקורות

- Billing, Ester M.H. (2002). Cocoa: Teaching Notes. In B. Litwiller & G.Bright (Eds.), Classroom Activities for Making Sense of Fraction, Ratio, and proportions: 2002 Yearbook chpt. 21). Reston, VA: The National Conuncil of Mathematics, Inc.
- Lamon, S.J. (1993b) ratio & proportion: connecting Content & Children's Thinking.*journal for Research in Mathematics Education 24 (1), 41-61.*
- Lamon, S.J. (1995) Ratio and Proportion: Elementary Didactical Phenomenology. In Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades, edited by Judith T. Sowder and onnie P. Schappell, 167-198. Albany, N.Y.: State University of New York Press.
- Lamon, S.J. (1999). Teaching Fractions and Ratio for Understanding. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Cramer, K. & Post, T. (1993, may). Connecting Research To Teaching Proportional reasoning. Mathematics Teacher, 86(5), 404-407

רשימת קישורים

- **בתוכנית הלימודים לכיתה ח'**

http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/algebra8.pdf

- **COMMOM CORE STATE STANDARDS INITIATIVE (CCSSI)**

http://www.corestandards.org/

- **היישומון של בניית מרובעים דומים**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/QuadranglesCconstruction3.ggb

- **היישומון משולשים דומים**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/SimilarTriangles.ggb

- **היישומון בניית מרובעים**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/QuadranglesCconstruction6.ggb

- **היישומון קיפולי הנייר**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/PaperFoldong-SimilarQuadrangles.ggb

- **היישומון דוגמאות נגדיות**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/Counterexamples.ggb

- **יחס או פרופורציה? באתר NRICH**

http://nrich.maths.org/4825

לקריאה נוספת

- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston,Va.:
- Cynthia W. Langrall and Jane Swafford (2000). Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning. Mathematics Teaching in Middle School, Vol. 6, No. 4, December 200*0, PP. 254-261.*
- Cynthia W. Langrall and Jane Swafford (2000). Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning. Mathematics Teaching in Middle School, Vol. 6, No. 4, December 200*0, PP. 254-261.*
- Cramer, K., Post, T.& Currier, S. (1993). Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In D. Owens (Ed.), Research Ideas For the Classroom (pp. 159-178). NY: Macmillan Publishing Company.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
- **המסמך "PROPORTIONAL REASONING"**

http://www.ride.ri.gov/instruction/curriculum/rhodeisland/resources/resource-docs/MathUnit-Proportionality_v24.pdf

- **PROPORTIONAL REASONING**

http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16588/1/ADUC-Fernandez-llinares2010.pdf