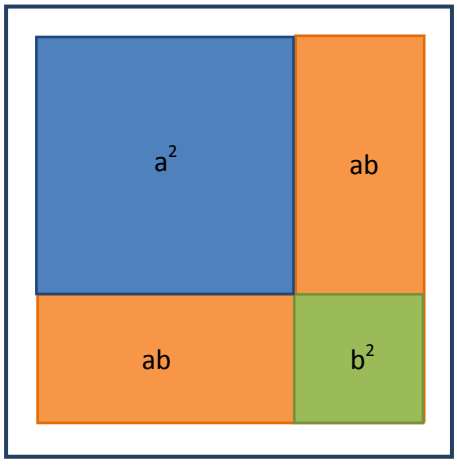
# הוכחות גיאומטריות לזהויות אלגבריות



# הוכחות גיאומטריות לזהויות אלגבריות

## תוכן עניינים


הקדמה ..... 4

מטרות היחידה ..... 4

רקע ..... 4

סדנה: שילוב בין אלגברה לגיאומטריה ..... 7

פתרונות והנחיות למדריך ..... 9

מקורות ..... 19

רשימת קישורים ..... 22

# הקדמה

## מטרות היחידה

בניית ייצוגים גיאומטריים להוכחות של זהויות אלגבריות ופיתוח יכולת הבנייה של מושגים בצורה עצמאית.

# רקע

הוכחה ויזואלית עושה שימוש בייצוגים ויזואליים או בדימויים ויזואליים כגון: צורות גיאומטריות, גרפים, צבעים, קיפולי נייר או כל דבר חזותי התופס את העין (Bishop, 1989, Tall, 1995). מעבר לעניין שיוצרת הוכחה ויזואלית בשיעור, מצביעים מספר חוקרים על יתרונות נוספים. Dreyfus (1994) טוען כי לתמיכה ויזואלית בהוראת הוכחות או מושגים, יש השפעה מרבית על ההבנה של הסטודנטים בפתרון בעיות. Tall (1995) גורס כי עבור מרבית התלמידים הוכחה ויזואלית ברורה ומובנת באופן מיידי, בניגוד לדרכי ההוכחה הנפוצות העושות שימוש בשפה מילולית, המובנת רק לחלק מהתלמידים. Bishop (1989) טוען כי יש ערך מוסף בשימוש בהצגות ויזואליות בכל המובנים של לימודי המתמטיקה. ממחקרם של הראל ודרייפוס (2009) שבחן את השימוש בהוכחות ויזואליות מנקודת מבטם של התלמידים עולה כי: מרבית התלמידים הביעו עניין בלימוד סוג זה של הוכחה. התלמידים סברו כי היא קבילה אך ציינו כי לדעתם היא לא תחשב קבילה בעיני מוריהם. בנוסף סברו מחצית מהתלמידים כי ההוכחה זו קלה יותר להבנה ומרביתם אף ציינו כי ישתמשו בסוג זה של הוכחה על מנת להוכיח טענה לחבר. שילוב של הצגות ויזואליות להוכחת זהויות גיאומטריות מהווה כר פורה לפיתוח והבנייה של מושגים באופן עצמאי.

זסלבסקי וויניצקי (1992) טוענות כי חלק מהקשיים הנפוצים, הגורמים לשימוש המועט בהוכחות ויזואליות הם:

- אינטרפרטציה לא נכונה של מידע גרפי;
- חוסר הבחנה בין יציר גיאומטרי והציור המייצג אותו;
- היעדר יכולת לקשר ולתרגם בין ייצוג ויזואלי לאנליטי (המעבר מייצוג ויזואלי לאנליטי קשה יותר, בדרך כלל, מהכיוון ההפוך).

הן מדגישות כי ייצוג ויזואלי, הנשען על האינטואיציה של הלומד, יכול להביא ללמידה משמעותית יותר ויכול לתרום להבנה טובה יותר של תלמידים רבים יותר (multiple - representations). עצם השימוש בייצוגים השונים מאפשר לתלמידים המסוגלים לפתור למשל, בעיות דווקא בקונטקסט גיאומטרי ולא באלגברי.

לם (1993) מצביע על שתי סיבות עיקריות שבשלן כדאי להראות הוכחה ויזואלית:

- הראשונה קשורה לכך, שהצגה ויזואלית עשויה לרמוז על צורת החשיבה האינטואיטיבית במתמטיקה.
- השנייה היא סיבה מעשית דידקטית הקשורה לכך שחלק מהתלמידים עדיין אינם שולטים במיומנויות החשיבה של מקצוע המתמטיקה. לחלקם אמנם חשיבה אנליטית והם יודעים לנסח את מחשבתם בצורה מדויקת, תמציתית ופורמאלית. בעוד אחרים הם בעלי חשיבה ויזואלית – גרפית. וישנם תלמידים שאינם משויכים לאף קבוצה. הצגתה של הוכחה ויזואלית תסייע לתלמידים מתקדמים להכיר את הרבגוניות של המתמטיקה ולהפנמת רב גוניות זו בכלי החשיבה המתמטיים שלהם, ולתלמידים המתקשים היא תסייע בגילוי מהו סגנון החשיבה המתמטית המתאים להם.

כיום, בעידן המחשבים, הולכת וגוברת ההכרה כי לייצוגים ויזואליים יש פוטנציאל העשוי לתרום לתהליך הלמידה, להעשיר אותו, ולהביא להבנה מעמיקה של מושגים מתמטיים.

# סדנה: שילוב בין אלגברה לגיאומטריה

## 1. הצגת חוק הפילוג בעזרת שטח של מלבן

**א.** פתרו את תרגילי הכפל הבאים:

$47\times 4=$ $\qquad$ $27\times 36=$ $\qquad$ $305\times 17=$

**ב.** פשטו את הביטויים הבאים (פתחו סוגריים):

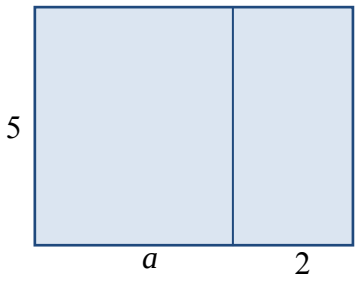
1) $2a(4+8a)$

2) $(3b+8)(4x+b)$

3) $(2x^2+3a+6)(5x+7)$

**ג.** בסרטוט שלפניכם שני מלבנים קטנים המרכיבים מלבן גדול ששטחו $5(a+2)$.

- הסבירו כיצד הביטוי $5(a+2)$ מבטא את שטח המלבן הגדול.
- מהו שטחו של כל אחד מהמלבנים הקטנים, והראו שהשוויון $5(a+2)=5a+10$ נכון.




**ד.** הציגו את הביטויים בסעיף א' ו-ב' בעזרת מודל שטח המלבן (המוצג בסעיף ג').

**ה.** בנו פעילות מתאימה לכתה שבה מוצג חוק הפילוג בעזרת שטחים של מלבנים.

## 2. שימוש במודל השטח להוכחת נוסחאות כפל מקוצר

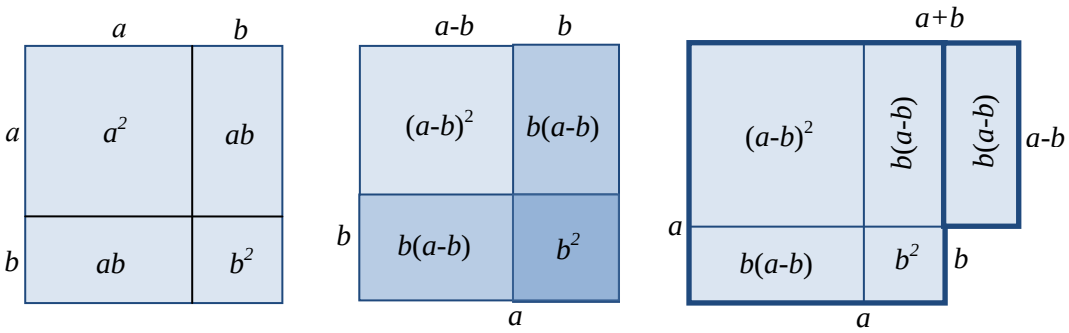
לפניכם שלוש נוסחאות כפל מקוצר ושלושה סרטוטים:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

א. ב. ג.




**א.** התאימו לכל נוסחה את הסרטוט המתאים.

הסבירו כיצד הסרטוט מייצג את הנוסחה.

**ב.** כיצד אפשר להשתמש בסרטוטים אלה בכיתה להוכחת נוסחאות הכפל המקוצר?

## 3. שימוש במודל השטח לפתרון משוואות (מאתר דע מדע)

כל אחד מהסרטוטים הבאים מייצג פתרון משוואה רבועית ע"י השלמה לרבוע. כיצד תסבירו זאת לתלמידים במקרה של המשוואה: $x^2 + 8x = 65$?

דרך א: דרך ב:

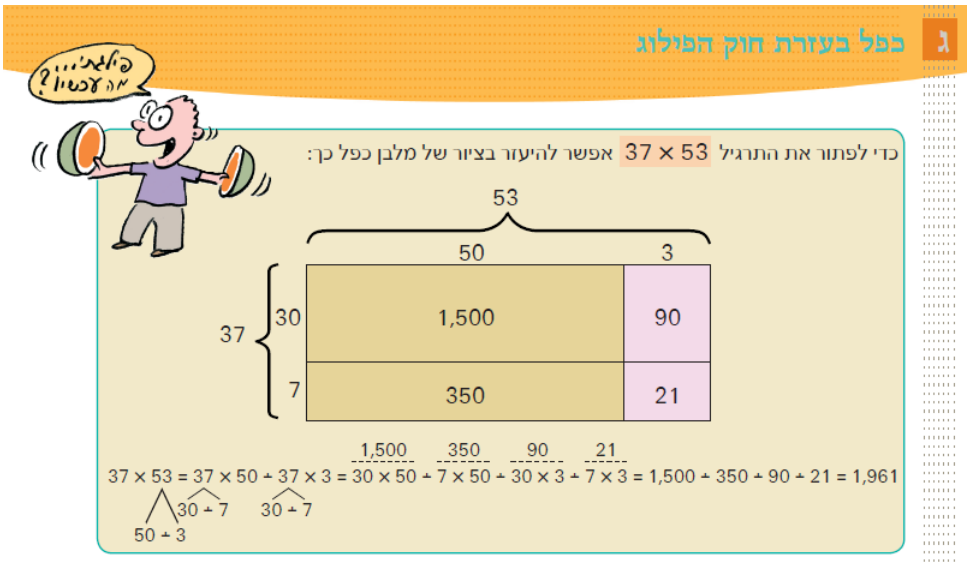


# פתרונות והנחיות למדריך

**הנחיות:**

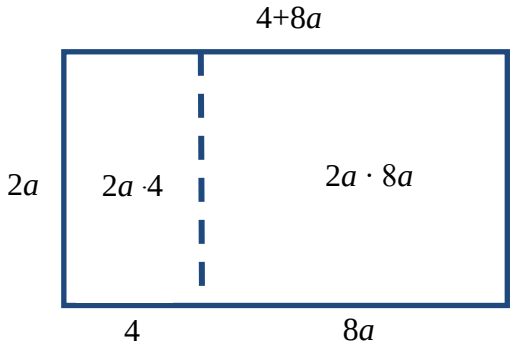
## 1. הצגת חוק הפילוג בעזרת מלבן

במסגרת לימודים בבית הספר היסודי התלמידים למדו את חוק הפילוג מעל הכפל. לימוד חוק הפילוג מבוסס על השימוש בשטח מלבן. כמו כן – לימוד כפל של מספרים גדולים גם מתבסס על המודל של שטח מלבן. ראו דוגמה מתוך ספר לימוד "שבילים, כיתה ד – כפל עד 10,000" (הוצאת מט"ח):



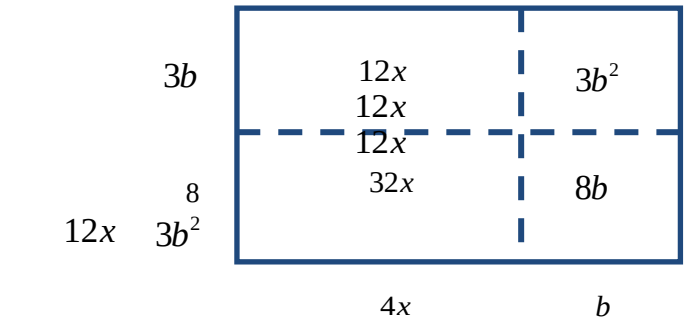

**ד.** הציגו את הביטויים בסעיף א' ו-ב' בעזרת מודל שטח המלבן (המוצג בסעיף ג').

באופן דומה אפשר להציג לתלמידים את חוק הפילוג בפעולת הכפל גם בביטויים אלגבריים. למשל: $2a(4+8a)=2a\cdot 4+2a\cdot 8a=8a+16a^2$

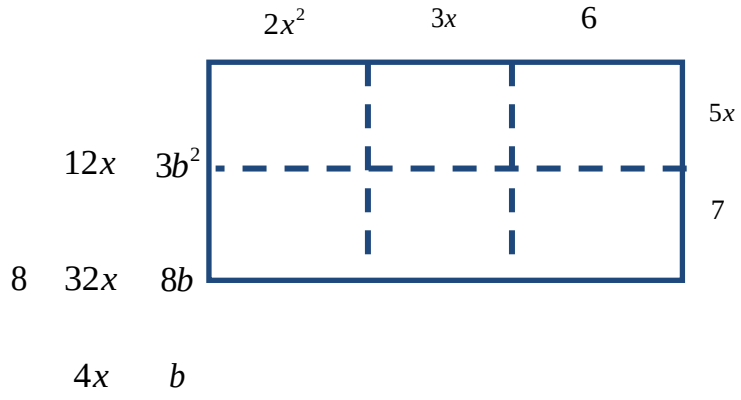


הציגו באמצעות מודל המלבן את פתיחת הסוגריים בשני הביטויים הנוספים:

- $(3b+8)(4x+b)$




- $(2x^2+3x+6)(5x+7)$




## שאלות לדיון

### מהם היתרונות של השימוש במודל שטח המלבן לכפל רב-איברים?

- ייצוג ויזואלי הנשען על ידע גאומטרי בסיסי.
- מודל החוזר על עצמו בנקודות שונות במהלך הלימודים, החל מבית הספר היסודי ועד התיכון.
- מספר האיברים בסכום המתקבל זהה למספר המלבנים הקטנים. עובדה זו מאפשרת לתלמידים בקרה על התוצאה המתקבלת.

### מהם החסרונות של השימוש במודל שטח המלבן לכפל רב-איברים?

- יש צורך בביצוע פעולות מכוונות של השתחררות מהשימוש במודל והפנמת הפעולה.
- ייצוג ביטויים אלגבריים הכוללים פעולות חיסור עלול להיות בעייתי ודורש שימוש במושג "סכום אלגברי", כלומר – ייצוג רב-איבר כסכום של איברים, למשל:

$$3x(2a-5b)=3x(2a+(-5b))$$

### השתחררות מהשימוש במודל

אפשר בשלבים הראשונים לבקש מהתלמידים לבצע פתיחת סוגריים על בסיס המודל של שטח המלבן. בהמשך אפשר לבקש מהם לתאר רק במילים את חלוקת המלבן ואת אורכי צלעותיו ללא הציור בפועל. ולבסוף חשוב לפשט את הביטויים ללא תלות בשטח המלבן.

## 2. שימוש במודל שטח להוכחת נוסחאות כפל מקוצר

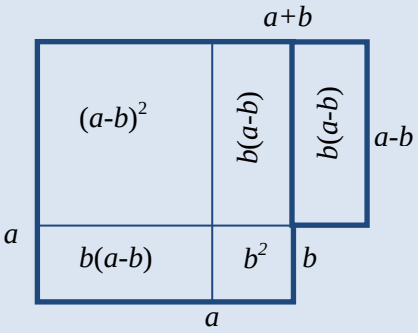
לפניכם שלוש נוסחאות כפל מקוצר ושלושה סרטוטים:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

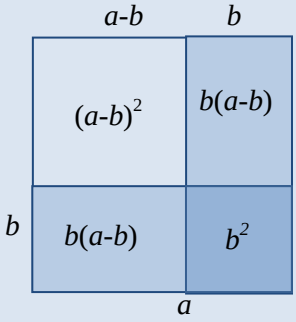
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

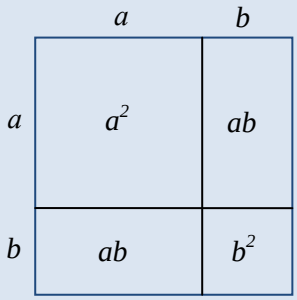
א.




ב.




ג.




**א.** התאימו לכל נוסחה את הסרטוט המתאים.
הסבירו כיצד הסרטוט מייצג את הנוסחה.

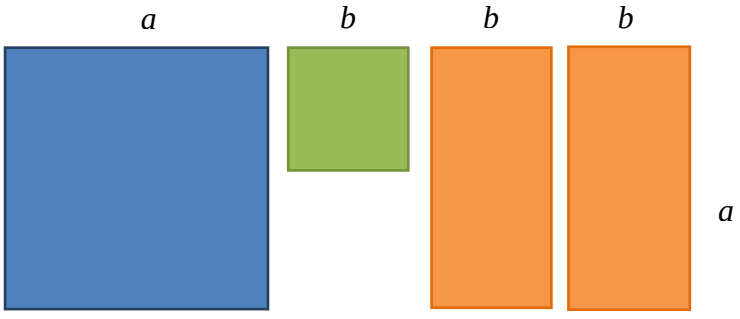
- נוסחה 1 מתאימה לסרטוט ג.
- נוסחה 2 מתאימה לסרטוט ב.
- נוסחה 3 מתאימה לסרטוט א.

**ב.** כיצד אפשר להשתמש בסרטוטים אלה בכיתה להוכחת נוסחאות הכפל המקוצר?

אפשר להכין פעילות לתלמידים בעזרת גזירה בנייר ומספריים:

### גזירה והרכבה

כל תלמיד מקבל אוסף מלבנים כאלה:

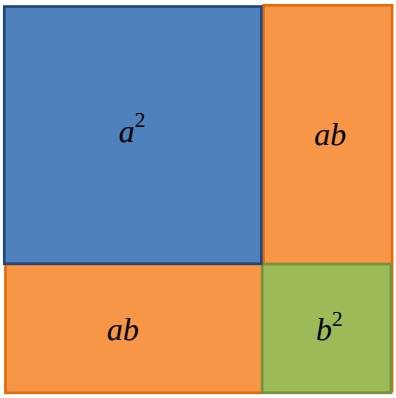


## א. ריבוע של הסכום: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

נסמן: $a$ – אורך צלע הריבוע הכחול, $b$ – אורך צלע הריבוע הירוק.
מכאן – מימדי שני המלבנים הכתומים הם $a\times b$.

לכן, השטח של הריבוע הכחול הוא $a^2$, השטח של הריבוע הירוק הוא $b^2$ ושטחם של כל אחד מהמלבנים הכתומים הוא $ab$.

מהמלבנים הנתונים נרכיב ריבוע שאורך צלעו הוא $a+b$




ולכן שטחו יהיה $(a+b)^2$.

שטחו של המלבן הוא סכום השטחים של

ארבעת המלבנים: $a^2+b^2+ab+ab=\ a^2+2ab+b^2$

מכאן: $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$.

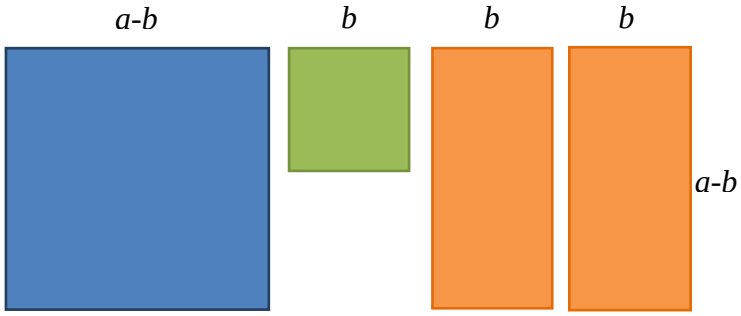
## ב. ריבוע ההפרש $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

נסמן:

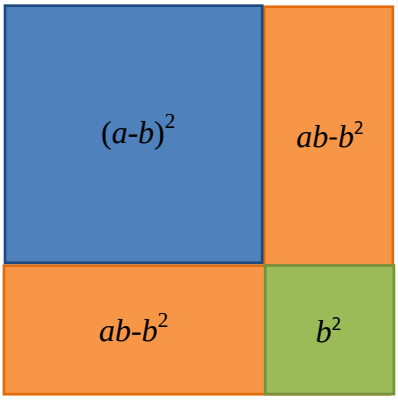
אורך צלע הריבוע הכחול: $a-b$,

אורך צלע הריבוע הירוק: $b$

מימדי כל אחד מהמלבנים הכתומים $(a-b)\times b$




גם כאן נרכיב מהמלבנים האלה ריבוע.




הפעם נקבל:

אורך הצלע של הריבוע שהרכבנו הוא $(a-b+b)=a$

ושטחו הוא $a^2$.

אפשר לייצג את שטח הריבוע הגדול כסכום

שטחי המרובעים הצבעוניים ולהשוותו לשטח הכללי

$$(a-b)^2+b^2+(ab-b^2)+(ab-b^2)=a^2$$

$$(a-b)^2+2ab-b^2=a^2$$

מכאן: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

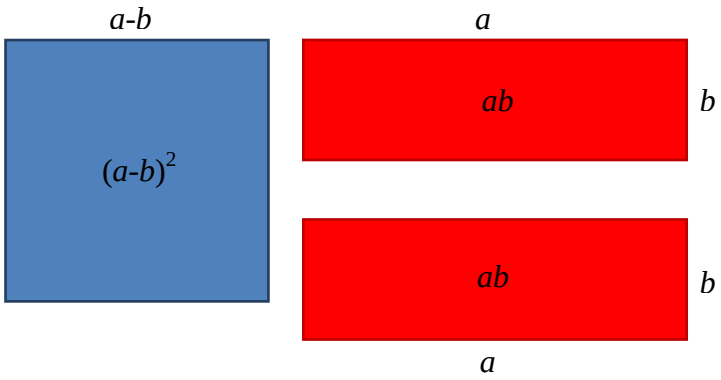
חשוב לציין שלהוכחת הנוסחה "ריבוע ההפרש" יש גם שימוש בטכניקה המקובלת בפתרון משוואות.

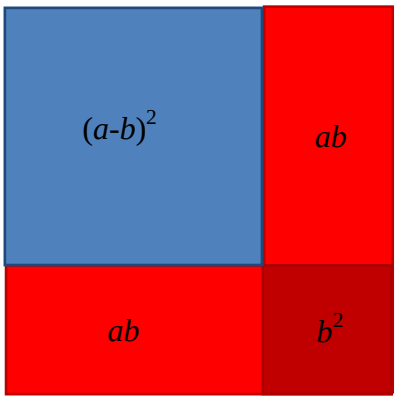
ייתכן שלחלק מהתלמידים ייצוג משולב זה יהווה קושי מסוים. לכן נציג את הנוסחה הזו בדרך נוספת.

### ייצוג נוסף לריבוע ההפרש $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

הפעם נשתמש ב- 3 צורות: ריבוע כחול שאורך צלעו $a-b$ ושני מלבנים אדומים שאורך צלעותיהם הם $a$ ו- $b$.

שטח של כל אחד מהמלבנים האלה הוא $ab$.




משלוש הצורות האלה נרכיב ריבוע שצלעו $a$ ושטחו $a^2$.

ניתן לראות גם שלשני המלבנים האדומים יש חלק משותף – הריבוע הבורדו.

קל לראות שאורך צלע הריבוע הבורדו הוא $b$ ולכן שטחו $b^2$.

אם נחסיר משטח הריבוע הגדול השווה ל- $a^2$ את שטחי שני המלבנים האדומים ששטחם המשותף $2ab$, אז שטח הריבוע הבורדו השווה ל- $b^2$ מוחסר פעמיים.

לכן, יש להוסיף פעם אחת את שטח הריבוע הבורדו $b^2$.

כלומר אחרי העברת אגפים: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

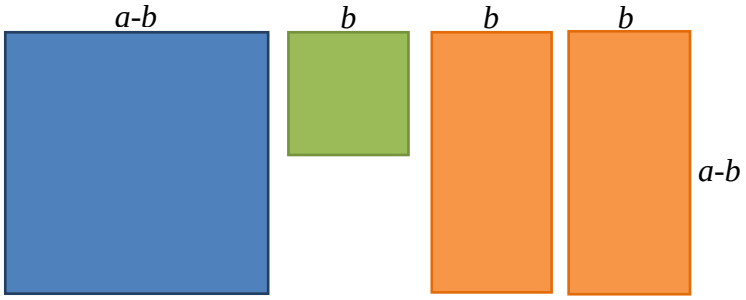
## ג. הפרש ריבועים $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

נסמן:

אורך צלע ריבוע כחול $a-b$,

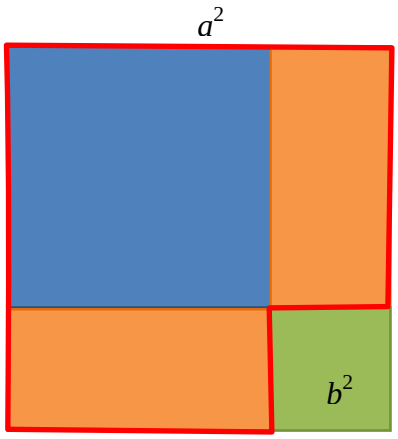
אורך צלע ריבוע ירוק $b$,

לכן מימדי המלבנים הכתומים יהיו $(a-b)\times b$



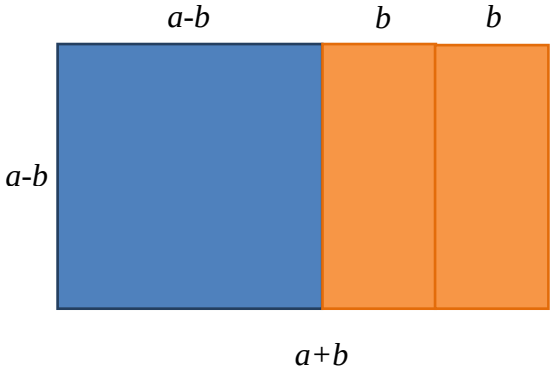

הפעם נרכיב שתי צורות גיאומטריות:

צורה א: ריבוע שצלעו $a$ ולכן שטחו הוא $a^2$




משטח הריבוע שהרכבנו נחסיר את השטח של הריבוע הירוק ששטחו $b^2$, נקבל צורה המורכבת מריבוע כחול ושני מלבנים כתומים (הצורה המוקפת בקו אדום) ששטחה $a^2-b^2$

משלושת המלבנים – שני הכתומים והריבוע הכחול, ניתן להרכיב מלבן נוסף כמתואר בציור:




ברור כי שטחו $(a-b)(a+b)$

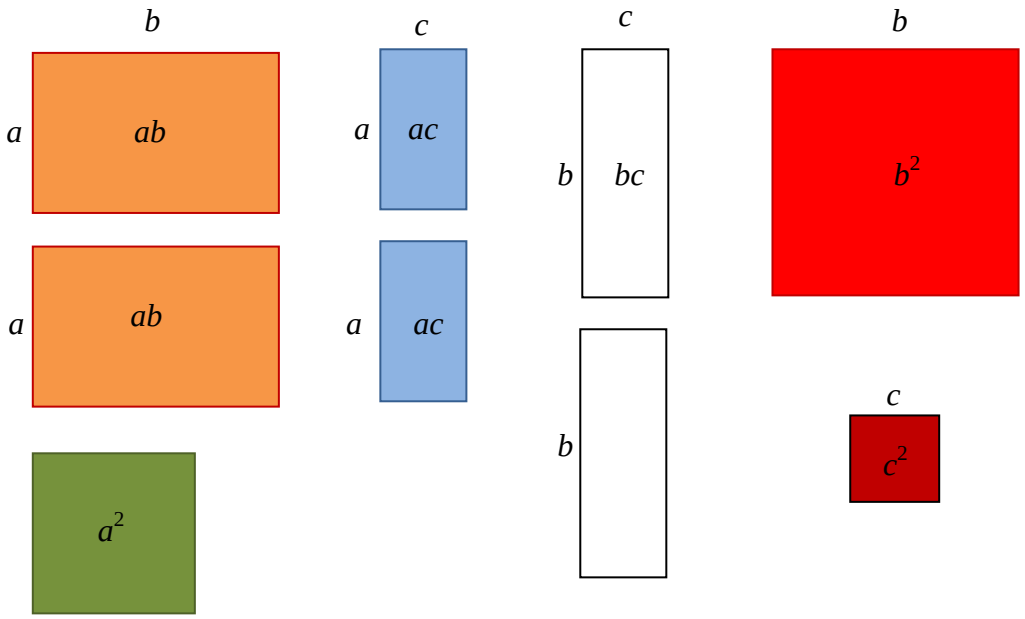
מכאן ניתן לראות ששתי הצורות מורכבות

מאותם מרובעים, לכן שטחם שווה:

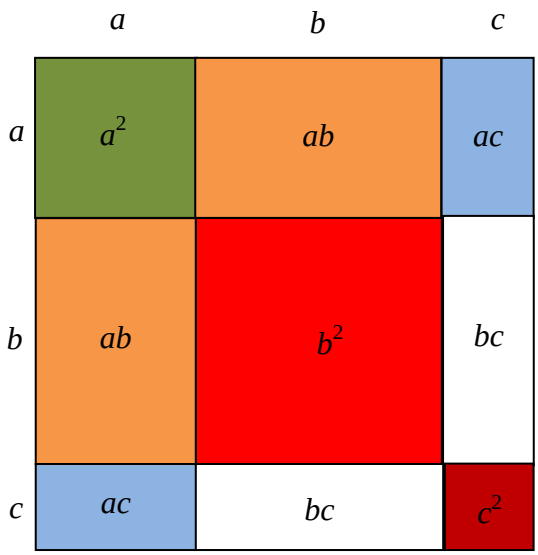
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

## א. ריבוע של תלת-איבר $(a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2$

הפעם נשתמש ב- 9 צורות: ריבוע ירוק שצלעו $a$ ריבוע אדום שצלעו $b$, ריבוע בורדו שצלעו $c$, שני מלבנים כתומים שאורך צלעותיהם $a$ ו- $b$ כלומר, שטחם: $ab$, שני מלבנים כחולים שאורך צלעותיהם $a$ ו- $c$ ששטחם $ac$ ושני מלבנים לבנים שאורכי צלעותיהם $b$ ו- $c$ ושטחם $cb$.




מתשע צורות אלו נבנה ריבוע באופן הבא:

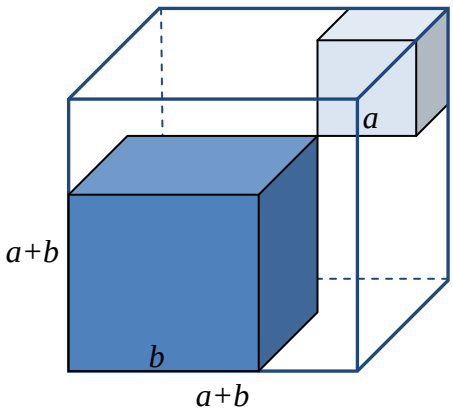


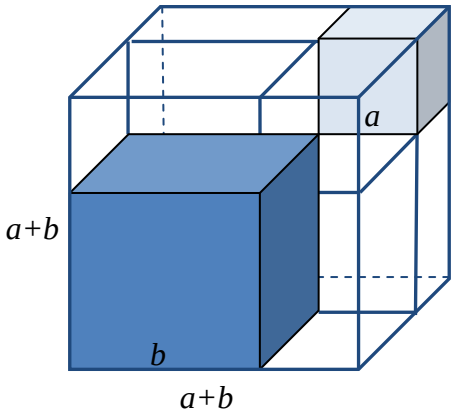

ונקבל:

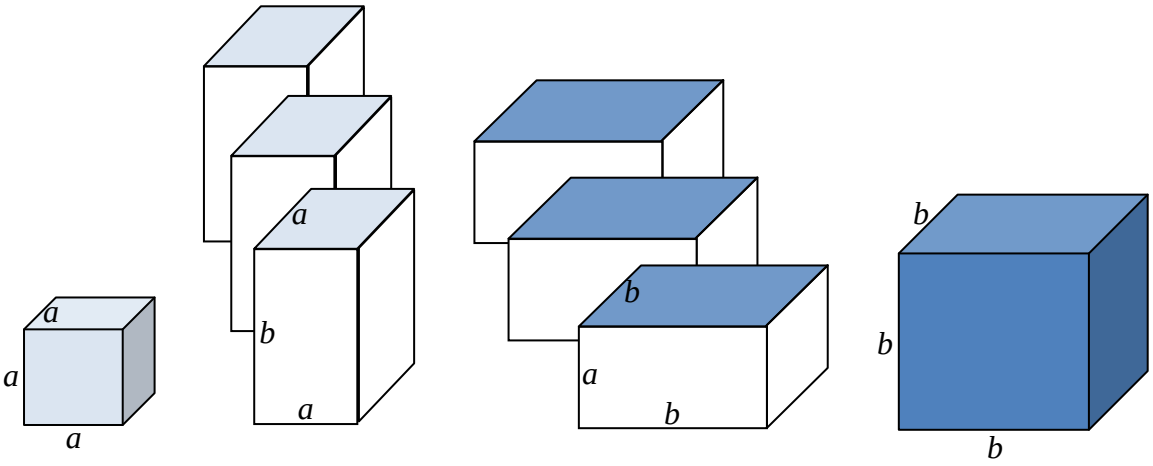
$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2$$

## ב. כפל מקוצר ממעלה שלישית $(a+b)^3=a^2+3a^2b+3ab^2+b^3$

תארו במילים את ההוכחה.



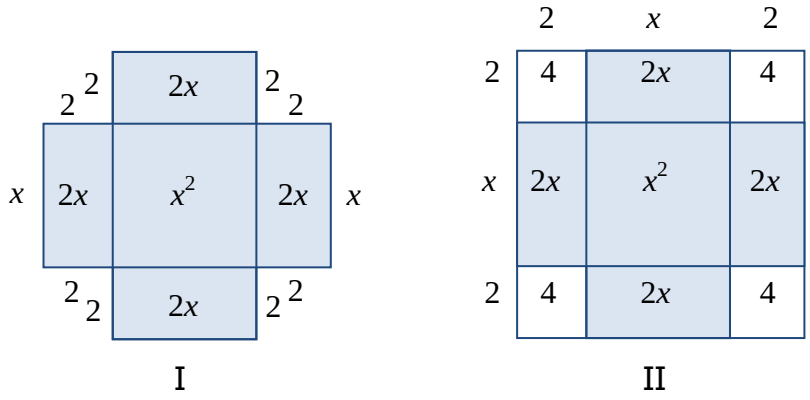
## 3. שימוש במודל השטח לפתרון משוואות (מאתר דע מדע)

ניתן להשתמש בגיאומטריה גם לפתרון משוואות ממעלה שנייה. זהו תיאור גיאומטרי של השלמה לריבוע.

למשל, נדגים בשתי דרכים כיצד ניתן לפתור בדרך גיאומטרית את המשוואה $x^2+8x=65$.

### דרך א

נשרטט ריבוע שאורך צלעו $x$. על כל צלע של הריבוע נשרטט מלבן שאורכו כאורך צלע הריבוע $x$ ורוחבו רבע מהמקדם של $x$ במשוואה, כלומר $\frac{8}{4}=2$.




שטח הצורה המורכבת מהריבוע המרכזי וארבעת המלבנים (סרטוט I) הוא 65. אפשר לחשב את השטח הצבוע בתכלת גם כהפרש של שטח הריבוע הגדול ושטחם של ארבעת הריבועים הלבנים שבפינותיו (סרטוט II). כלומר:

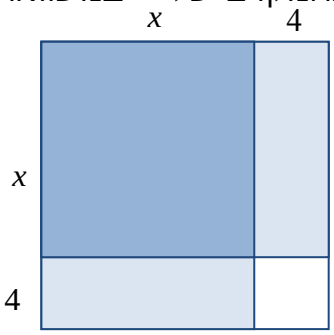
$$S=(x+4)^2-4(2\cdot 2)=65$$
$$(x+4)^2=65+16$$
$$(x+4)^2=81$$
$$x+4=9$$
$$x=5$$

מכיוון שכאן מדובר בשטחים, התייחסנו רק לשורש החיובי. ברור שיש לקחת בחשבון גם את הפתרון: $x+4=-9$

$$x=-13$$

## דרך ב

נשרטט ריבוע שצלעו $x$. על כל צלע של הריבוע נשרטט מלבן שאורכו כאורך צלע הריבוע $x$ ורוחבו מחצית מהמקדם של $x$ במשוואה, כלומר $\frac{8}{2}=4$.




שטח הצורה המורכבת מהריבוע (הכחול) ושני המלבנים (בתכלת) הוא 65. אפשר לחשב את שטח הצורה כהפרש של שטח הריבוע הגדול ושטח הריבוע הלבן שנוצר בפינה. כלומר:

$$S=(x+4)^2-16=65$$
$$(x+4)^2=65+16=81$$
$$x+4=9$$
$$x=5$$

מכיוון שמדובר בשטחים, התייחסנו רק לשורש החיובי. ברור שלצורך פתרון המשוואה נקבל גם את הפתרון:

$$x+4=-9$$

$$x=-13$$

# מקורות


- הראל ר. ודרייפוס ט. (2009). הוכחות ויזואליות: השקפותיהם ואמונותיהם של התלמידים, *על"ה 41*, ע"מ 12-19.

http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/alle41/alle41-3.pdf

- לם (1993). ריבועים, *על"ה* 13, ע"מ 71-17.

http://kesher-cham.technion.ac.il/clickit_files/files/index/552619713/476017540/374737328.pdf

- סלבסקי א. ווניצקי ג. (1992). הוכחות ויזואליות ללא מילים (כמעט), *הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה*, כפר המכבייה.

http://highmath.haifa.ac.il/data/sadnaot/sadna31.pdf

- צוות מתמטיקה "מחר 98" (1996). פרויקטים לתלמידים - הוכחה ללא מילים.

http://kesher-cham.technion.ac.il/clickit_files/files/index/552619713/210642784/794401329.pdf

- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.

- Dreyfus, T. (1994). Imagery and reasoning in mathematics and mathematics education. In D. Robitaille, D. Wheeler, & C.Kieran (Eds.), *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 107-122). Sainte-Foy,Quebec, Canada: Les presses de l'universite Laval.

- Tall, D. (1995) Cognitive development, representations and proof. Paper presented at the conference on *Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education*, London, December 1995, pp. 27-38.

# רשימת קישורים

- עמוד "גיאומטריה אוקלידית" באתר **דע מדע**

http://www.damada.co.il/topics/inventions/db/geometry_euclid/geometry_euclid.shtml