המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

מדבר פיתגורס

הפרק הרלוונטי בתכנית הלימודים: גיאומטריה – משפט פיתגורס

משך הזמן המומלץ להוראת היחידה: 90 דקות

מבוא

הפעילות שלפנינו עוסקת בבעיית מינימיזציה. התלמידים יתבקשו למצוא את המסלול הקצר ביותר המתאים לאילוצים נתונים. במהלך חיפוש המסלול יעלה הצורך לחשב אורכים של קטעים המרכיבים אותו בעזרת משפט פיתגורס. ישנה סבירות גבוהה שהתלמידים אינם מכירים משפט זה, ולכן דרוש שיעור הכנה המציג אותו, מוכיח אותו ומתרגל את ההיבטים שיידרשו לשיעור הנוכחי. בנספח לפעילות ניתן למצוא נקודות לניהול שיעור שכזה.

בשלב זה נצא מנקודת הנחה שקיימתם את שיעור ההכנה אם היה צורך בכך.

ניהול הפעילות

הפעילות עטופה בסיפור מסגרת על נסיך המגיע אל מדבר פיתגורס, ועליו לחצות אותו בהתאם לאילוצי השתייה המחמירים שלו.

הפנו את התלמידים אל דף התלמיד הראשון, בצירוף מפת המדבר. קראו יחד איתם את הסיפור, תוך שאתם מלווים אותו בהסברים על שקף המדבר המוקרן על הלוח (את השקף הזה יש להכין מהמפה המופיעה בדף תלמיד 1). בדף תלמיד זה מופיעות 3 בדיקות לא מוצלחות שאותן מבצע הנסיך. מומלץ שתבצעו את הבדיקות האלה יחד עם התלמידים על הלוח. המטרה היא לוודא שהם הבינו את האילוצים. מורה הרוצה בכך, יכול לאפשר לתלמידים לעבוד על 3 הבדיקות האלה בעצמם, ורק אז לנהל דיון על הלוח. בשלב הבא התלמידים יעברו אל דף תלמיד מספר 2, בו הם מתבקשים למצוא מסלול שיאפשר להם לחצות את המדבר בהתאם לאילוצים. העבודה על דף זה עשויה להימשך זמן רב, ובמהלכה הם יוכלו להשתמש בסרגלים ובמחשבונים. התלמידים ינסו לבנות

מסלולים שאינם עולים באורכם על 37 ק"מ, אך רובם יגלו מסלולים מעט ארוכים יותר. חשוב לציין שגם מסלול באורך של 37.02 ק"מ ייחשב כלא עומד במשימה.
לאחר שהתלמידים יציגו את מסלוליהם על הלוח, הם יעברו לעבוד על דף תלמיד 3, בו מתברר שהמלך – אביו של הנסיך – השאיר לו רמז שיעזור לפתור את הבעיה. קראו יחד עם התלמידים את הכתוב בדף תלמיד זה. בשלב זה תוכלו לנהל על הלוח דיון שיוליך לפתרון הנכון של בעיית המדבר, או לאפשר לתלמידים לחזור אל המשימה ולנסות לעמוד בה שוב.
הסבר הפתרון דורש ידע בסיסי בנושא חפיפת משולשים.

הזמן המומלץ לפעילות הוא מפגש של שעה וחצי לפחות.

דף תלמיד 1

מדבר פיתגורס

הנסיך אדום השיער יצא למסע לחיפוש האוצר האבוד, כמצוות אביו. עם הנץ החמה הגיע אל המדבר הידוע.

השלט שניצב בכניסה למדבר, בסמוך למעיין שלידו עמד, הזהיר:

זהו 'מדבר פיתגורס', הנורא מכל המדבריות! אף שקטן הוא, חומו כבד ללא נשוא, ואין אדם היכול ללכת בו מרחק העולה על 10 ק"מ מבלי לשתות, לטבול ולצנן גופו בבאר או בנהר. בנוסף, אין אדם היכול לצעוד בו יותר מ- 37 ק"מ בסך הכל – גם לא סנטימטר אחד יותר.

אל השלט היה מוצמד עותק מגולגל של מפת המדבר. הנסיך לקח את המפה וגולל אותה (ראו שרטוט המפה בעמוד הבא). מבט מהיר על הנתונים המשורטטים הפיל את שארית רוחו: הדרך הישרה מן המעיין שבפתח הכניסה למדבר פיתגורס בו שהה - אל באר ג' שהיא נקודת סיום המדבר, נחסמה על-ידי רכסי פיתגורס, שלא ניתן לעבור אותם.

מצפון וממערב ל"מדבר פיתגורס" זרם נהר בעל שם מוזר: "נהר המראות". ואכן, משהתבונן בו הנסיך נדהם לגלות כי בנהר זה השתקף "מדבר פיתגורס", ואפשר היה לראות בנקל את ההשתקפויות של בארות א' ו- ב', ואף את תמונת עצמו ראה מנגד.

הנסיך הבין שעליו לתכנן את מסעו בקפידה. נקודות השתייה שלו יכולות להיות במעיין הנמצא בכניסה למדבר, בבארות א', ב' ו- ג', ובכל נקודה על שפת נהר המראות.

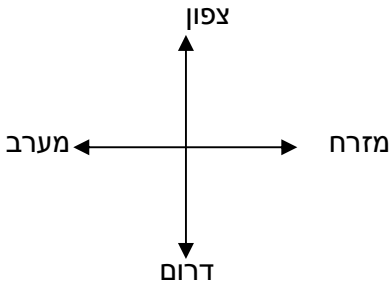
הוא ביצע שלוש בדיקות מהירות שהבהירו לו את הקושי של המשימה.

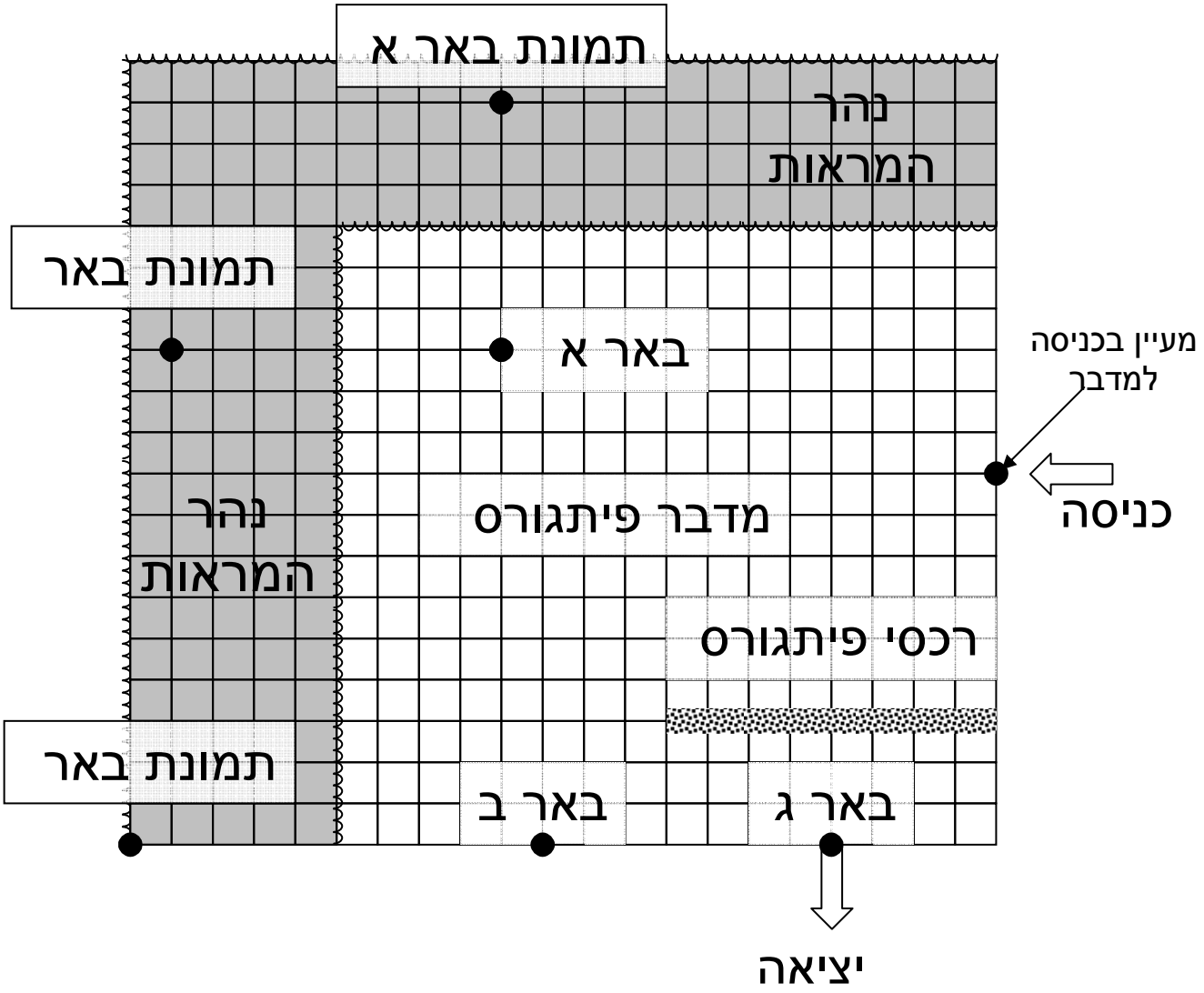
1. החוקים לא אפשרו לו ללכת בקו ישר אל הקצה של רכסי פיתגורס, ומשם בקו ישר אל באר ג', שהיא נקודת היציאה מהמדבר. מדוע?
2. החוקים לא אפשרו לו ללכת בקו ישר אל באר א'. מדוע?
3. החוקים לא אפשרו לו ללכת צפונה עד נהר המראות, ואז להקיף את המדבר נגד כיוון השעון, עד לנקודת היציאה שבבאר ג'. מדוע?

הסבירו לגבי כל הצעה של הנסיך מדוע אינה עומדת בחוקי המדבר.

מפת המדבר

כל צלע של משבצת במפה = 1 ק"מ במציאות





הסבר שלוש הבדיקות הראשונות אותן ביצע הנסיך

כאמור, עליכם לדון עם התלמידים על הלוח בשלוש הבדיקות הראשונות אותן ביצע הנסיך. אחת מהמטרות של בדיקות אלה היא לאמת שהתלמידים הבינו את נתוני הבעייה. להלן ההסברים מדוע כל אחת מהבדיקות אינה עומדת בתנאי המדבר. היעזרו בתלמידים על-מנת להגיע להסברים אלה.

1. נסמן ב- A את נקודת הכניסה למדבר, ב- B את הנקודה בקצה המערבי של רכסי פיתגורס, ב- C את נקודת באר ג', שהיא היציאה מהמדבר, וב- D את הקצה המזרחי של רכסי פיתגורס.

   נסתכל במשולש ABD: הקטע הראשון, AB , מקיים לפי משפט פיתגורס:

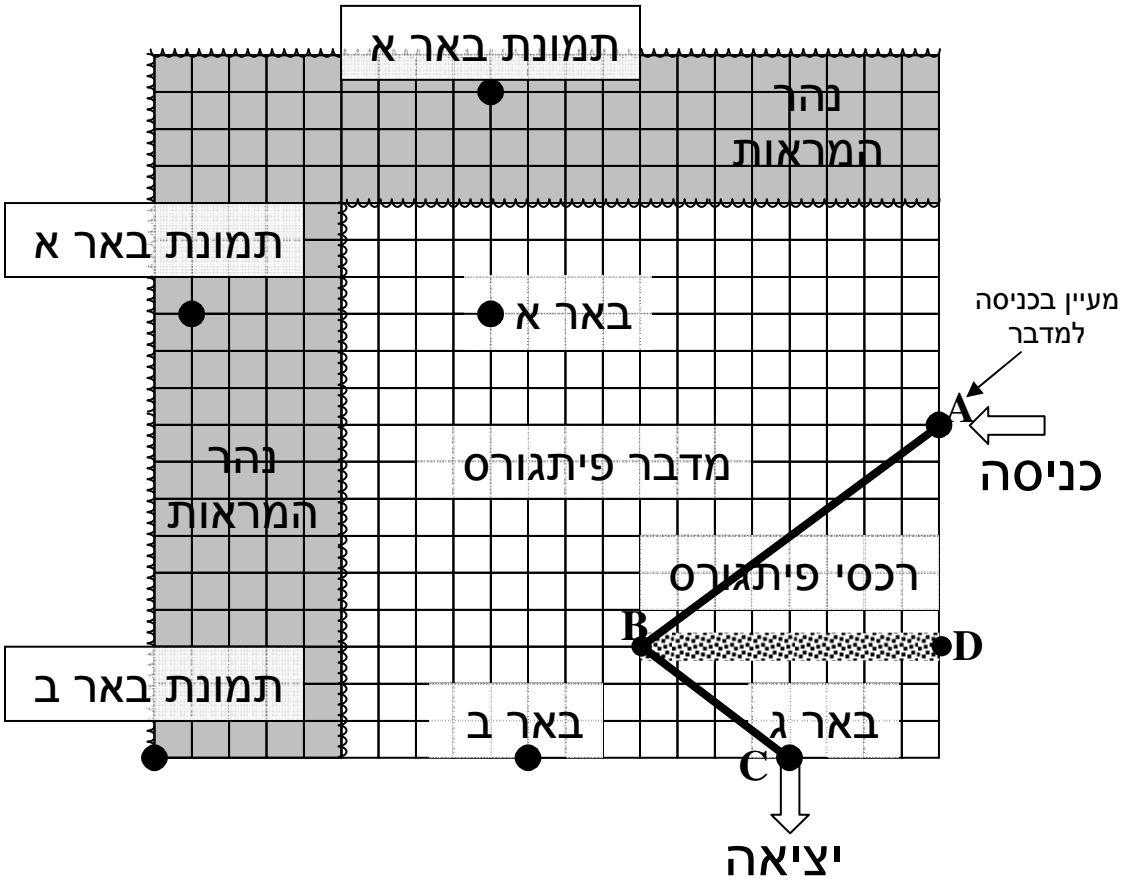
   $AB^2 = 6^2+8^2 = 36+64 = 100 \rightarrow AB = \sqrt{100} = 10$

   הקטע השני BC מקיים: $BC^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$

   $BC = \sqrt{25} = 5$

   סכום האורכים AB + BC הנו $10<15 = 5+10$ (למעשה, מכיוון שאורכו של הקטע AB הוא 10, הרי עבור כל אורך של הקטע BC לא היינו עומדים במשימה).

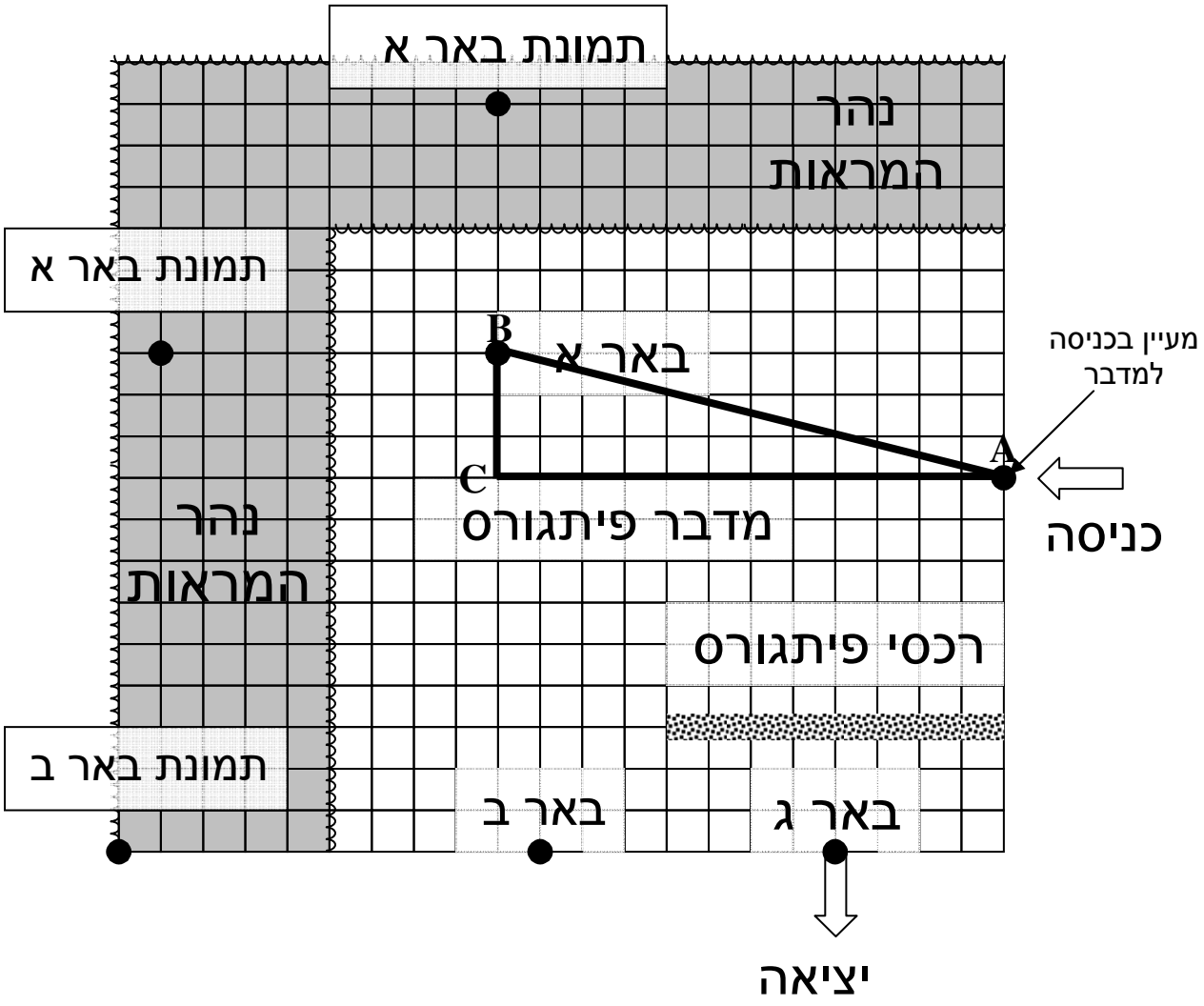
   מאחר שאין מקור מים בדרך - אסור ללכת בדרך זו!



2. נסתכל במשולש ABC. לפי משפט פיתגורס: $AB^2 = 12^2+3^2 = 144+9 = 153$

ומכאן: $AB = \sqrt{153} = 12.369 > 10$

לא ניתן לבצע את המשימה מכיוון שאין מקור מים בדרך.



3. המסלול המקיף את המדבר נגד כיוון השעון מגיע לנהר בהליכה צפונה אחרי 6 ק"מ, משם הוא ממשיך לאורך הגדה הצפונית והגדה המערבית של הנהר, מרחק של 31 קילומטר. אמנם ההליכה היא בסמוך למקור מים אך כבר עד כאן עברנו 37 קילומטרים, ולא נוכל לסיים את המסלול – נותרו קטע של 5 ק"מ עד לבאר ב' וקטע של 7 ק"מ עד ליציאה מהמדבר. אין מחסור במים אך קיימת בעיה של חריגה מהמרחק הכולל המותר.

דף תלמיד 2

תכנון המסלול במדבר

הנסיך לקח סרגל, עיפרון ומחשבון, והחל לשרטט מסלולים אפשריים במפה. הוא חישב את אורכי הקטעים המרכיבים את המסלולים ואת האורכים הכלליים של המסלולים. רבים מהמסלולים ששרטט עמדו בתנאי הראשון:

- אין לצעוד במדבר דרך העולה על 10 ק"מ ללא עצירה במקור מים (באר או נהר).

לעומת זאת הוא התקשה מאוד לעמוד בתנאי השני:

- אין לצעוד במדבר דרך העולה על 37 ק"מ. גם לא סנטימטר אחד יותר.

הנסיך ידע שהדרישה האחרונה היא קפדנית מאוד! אם בתכנון שלו יתקבל מסלול כולל של 37.01 ק"מ, הוא לא יוכל לסיים אותו.

היעזרו גם אתם בסרגל, עיפרון ומחשבון, ונסו למצוא מסלול שיעמוד בשני התנאים של המדבר. אם תקבלו במחשבון מספרים לא שלמים, העתיקו 3 ספרות אחרי הנקודה.

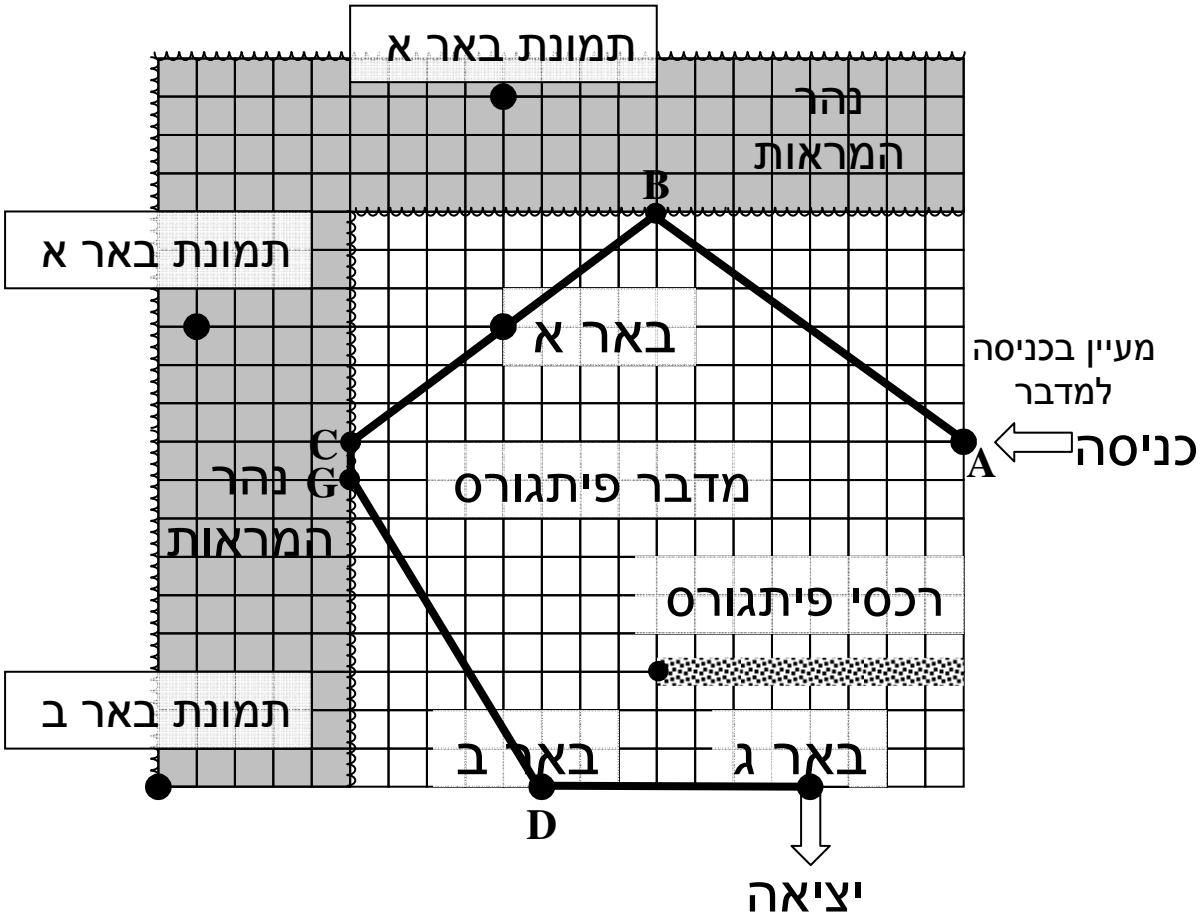
עבודת התלמידים על משימת המדבר

משימת המדבר קשה מאוד, וסביר שרק מעטים מהתלמידים יעמדו בה. רבים יגיעו למסלולים העומדים בתנאי הראשון, אך אורך המסלול הכולל שלהם יהיה מעט יותר מ-37 קילומטרים. שבחו תלמידים אלה אך בקשו מהם לנסות ולשפר את מסלוליהם.
באפשרותכם לבקש מהקבוצות השונות להציג על הלוח את המסלולים אליהם הגיעו.
בעמוד הבא נציג שתי דוגמאות למסלולים אותם עשויים התלמידים לבנות, אך הם אינם עומדים בתנאי השאלה. לאחר הצגה זו נציג את המשך הסיפור, בו יתקבל רמז ממשי אשר עשוי לעזור בפתרון הבעיה.

1. מתחילים בהליכה של 10 קילומטר (AB) אל נהר המראות (ראו עמוד הבא). שימו לב שהשאלה נבנתה כך שיהיה נוח להשתמש מספר פעמים בשלשה הפיתגורית 6,8,10. מנקודה B ממשיכים 10 ק"מ ל"נהר המראות" המערבי - קטע BC. קטע זה, גם אם לא במתכוון, עובר בבאר א' (באר זו נמצאת באמצע הקטע BC). בדיקה קצרה מראה שהמרחק מ- C אל באר ב' (נקודה D) ארוך מ- 10 ק"מ:

$$(CD)^2 = 9^2 + 5^2 = 106 \quad \leftarrow \quad \sqrt{106} = 10.295 > 10$$

לכן, אי-אפשר להגיע ישירות מ- C ל- D ויש לרדת מעט על גדת הנהר. תלמידים רבים ירדו קילומטר שלם לעבר נקודה G, ומשם ימשיכו בדרך הישרה אל הנקודה D. במקרה זה $GD = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9.434$. הנקודה D (באר ב') מרוחקת 7 ק"מ מסוף המסלול (באר ג'). הגענו למסלול כולל של 37.434=7+9.434+1+10+10, ומכאן שמסלול זה אינו עומד בתנאי הבעיה.
שימו לב לכך שאם היינו יורדים מ- C כלפי דרום פחות מקילומטר, עד שהמרחק אל D היה 10 קילומטר בדיוק, עדיין היינו מקבלים מסלול ארוך מדי: 37=7+10+10+10 ועוד יש להוסיף את הקטע הקצר שירדנו על גדת הנהר.

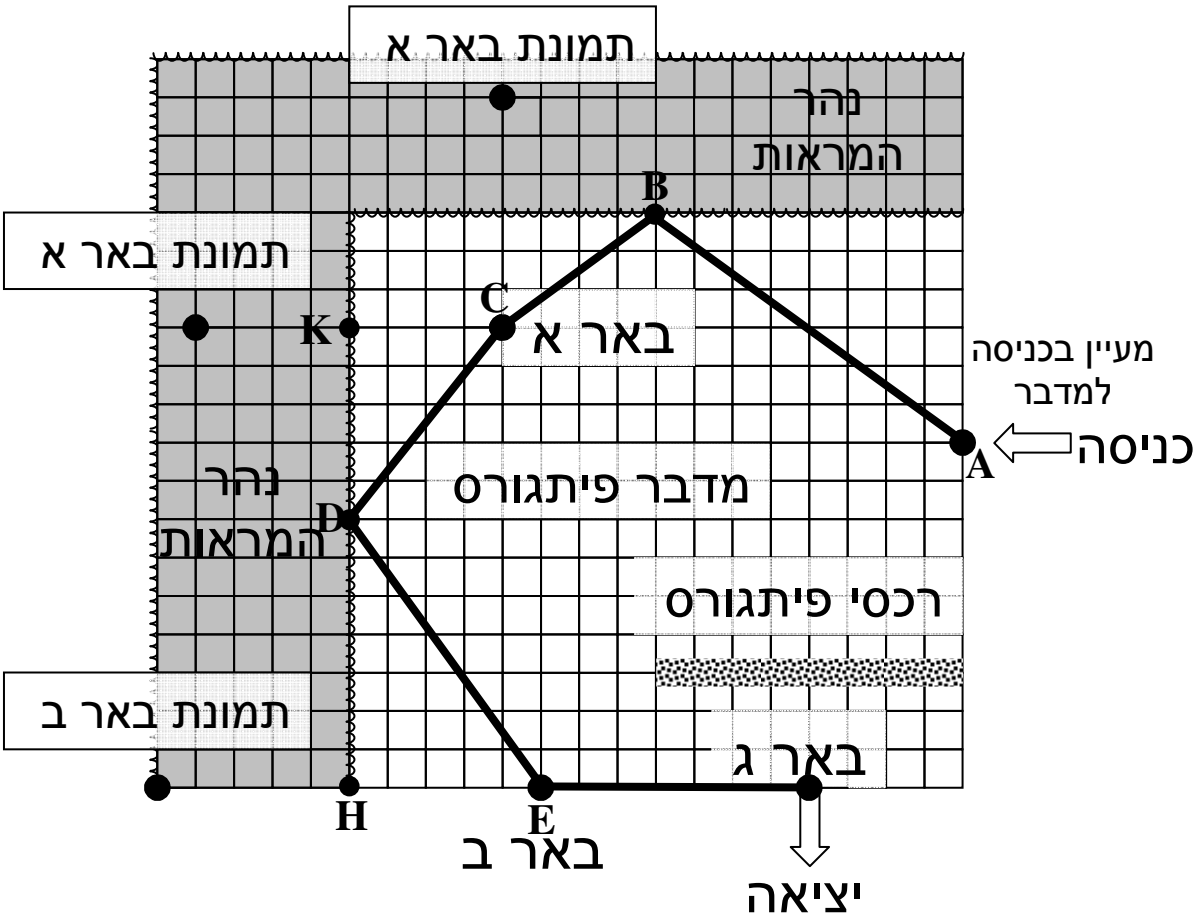

תמונת באר א
נהר
המראות
B
תמונת באר א
באר א
מעיין בכניסה
למדבר
כניסה
A
C
G
נהר
המראות
מדבר פיתגורס
רכסי פיתגורס
תמונת באר ב
באר ב
באר ג
D
יציאה

2. במסלול זה, לאחר ההגעה לבאר א' (נקודה C), אנו צועדים אל הנקודה D שעל גדת הנהר וממנה צועדים אל באר ב' (נקודה E). עד לבאר א' עברנו דרך של 15 ק"מ.
נחשב כעת לפי משפט פיתגורס את אורכי הקטעים CD ו- DE.

במשולש CKD ← $CD^2=4^2+5^2=41$.$CD=6.403$

במשולש DHE ← $DE^2=7^2+5^2=74$.$DE=8.602$

המסלול כולו עד ליציאה יהיה: $10+5+6.403+8.602+7=37.005>37$. המסלול ארוך רק ב- 5 מטרים מהאורך המותר. פספוס קטן, אבל עדיין פספוס! שבחו תלמידים שיגיעו למסלול זה.



דף תלמיד 3

הפתק הנסתר

הנסיך כשל בכל ניסיונותיו לגלות מסלול באורך שאינו עולה על 37 ק"מ. תחושת התסכול שלו נבלמה לרגע כאשר הבחין בנייר שהוסתר בין קפלי המפה. כששלף אותו, נוכח לדעת כי היה זה מכתב מאביו, ובו נאמר:

בני, אף שליבי הרחמן אומר לגלות את אוזנך כיצד לפתור את בעיות המסע - לא אעשה זאת, שכן זהו מסע המבחן שלך. בכל זאת, ארמוז לך זאת: ודאי יודע אתה שהדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות היא הקטע הישר המחבר אותן. שים לב!

אם אינך יכול ללכת בדרך הישר - לך בדרך הצופנת בתוכה את הקטע הישר, כאשר תמונת מטרתך לנגד עיניך.

בתוספת קצת דמיון, חשיבה וחישוב, תוכל להיחלץ ממדבר פיתגורס.

אביך האוהב, הדואג,

אך המתעקש כי תפתור בעצמך את בעיותיך.

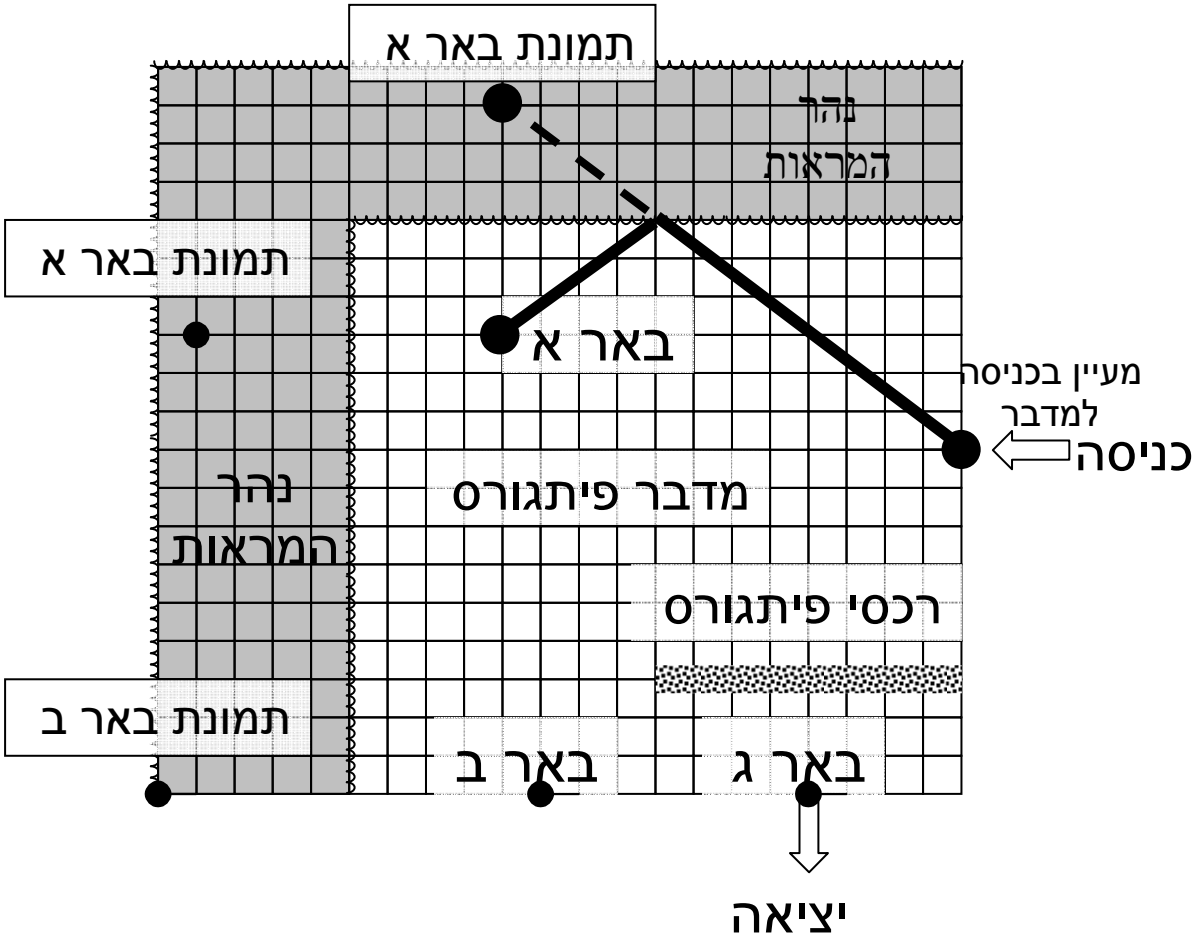
וכך אמר הנסיך לעצמו. "אני נמצא כעת בבאר הכניסה למדבר, אני מעוניין להגיע אל באר א', ואין לי אפשרות לעשות זאת תוך הליכה בקו ישר. על איזו תמונת מטרה מדבר אבי?"

התבונן הנסיך על נהר המראות, ולפתע - נגה עליו האור! הוא מיהר לשרטט ולחשב, ניצל את התובנה החדשה שלו, גילה את המסלול הנכון, יצא לדרך, והגיע מקץ 37 ק"מ בדיוק אל באר ג' בקצה המדבר.

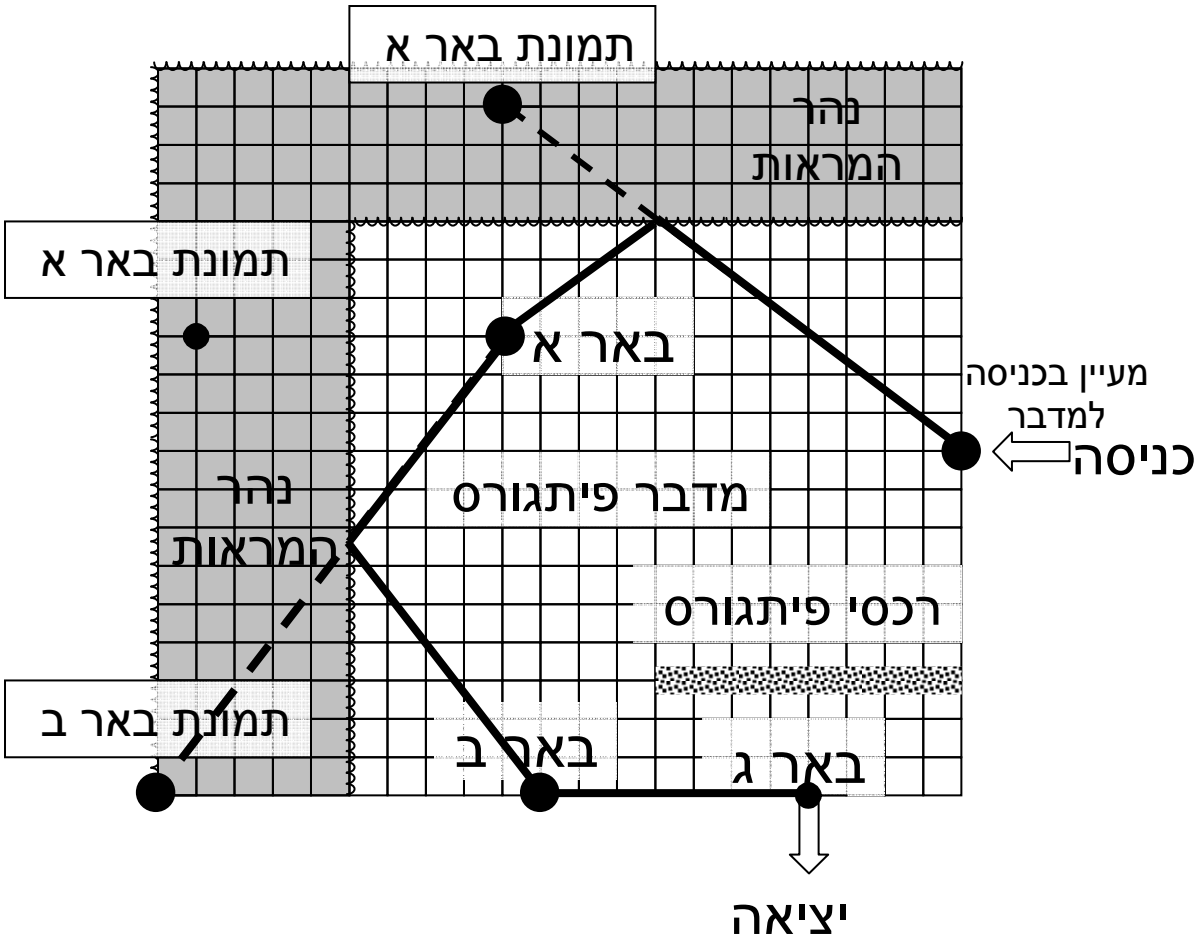
נסו אף אתם לגלות את שגילה הנסיך.

פתרון המשימה

הרמז שניתן לנסיך על-ידי אביו מותיר עדיין לתלמידים משימה לא פשוטה. באפשרותכם לתת להם את דף תלמיד 3, על-מנת שיחפשו שוב את המסלול העומד בתנאי המדבר, או לקיים איתם דיון על הלוח שיוליך אל הפתרון (מומלץ).
נתמקד ב- 3 נקודות: המעיין בכניסה בו נמצא הנסיך, באר א' ותמונת באר זו בנהר המראות. הנסיך מעוניין להגיע אל באר א', אך אינו יכול ללכת בדרך הישר – הוא חייב לעבור בדרך בנהר המראות. על-פי הרמז, על הנסיך ללכת אל כיוון התמונה של באר א' בנהר המראות. לאחר ההגעה לנהר ושתייה בו, יש להמשיך בקו ישר אל באר א':

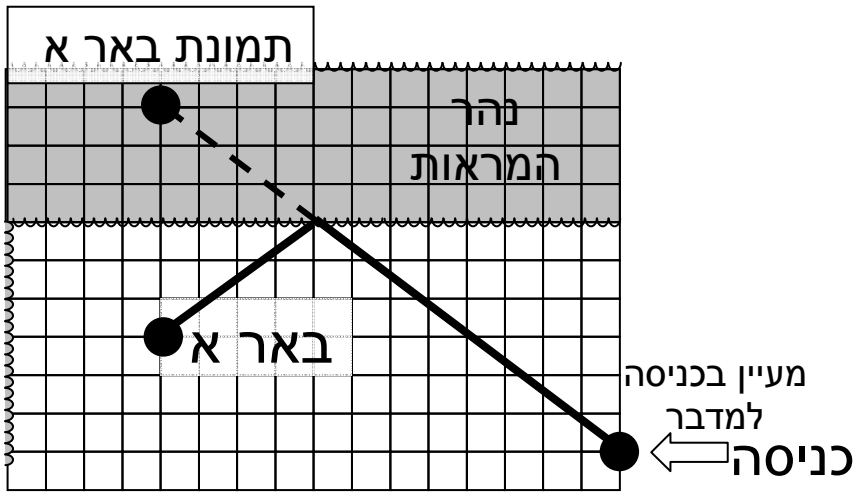


בטרם נסביר מדוע הדרך שקיבלנו עד באר א' היא הקצרה ביותר האפשרית, ומדוע שני הקטעים המרכיבים אותה אינם עולים כל אחד על 10 ק"מ, נבצע את אותו הרעיון כדי להמשיך אל באר ב' דרך נהר המראות. לשם כך נתקדם לכיוון התמונה של באר ב', וכשנגיע לנהר נפנה אל באר ב'.

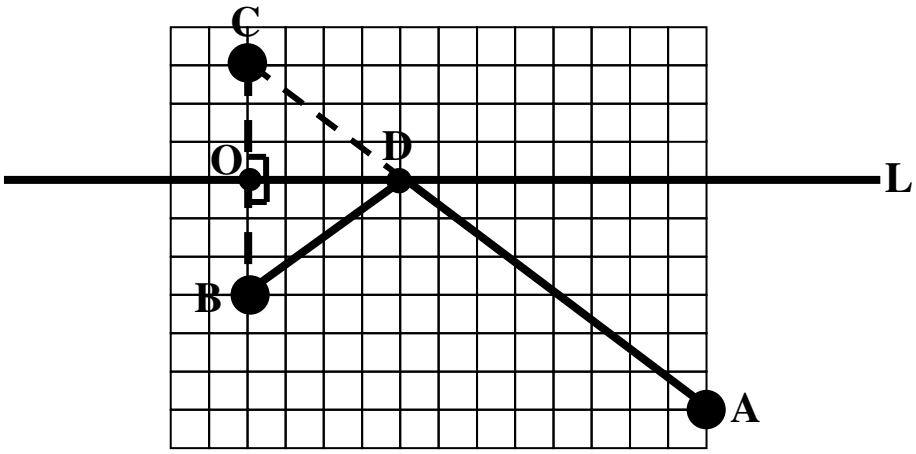


הוספנו גם את הקטע מבאר ב' לבאר ג', וקיבלנו את המסלול המבוקש. נראה כעת שמסלול זה עומד בתנאי המדבר.

נתבונן בשלב ההליכה הראשון:

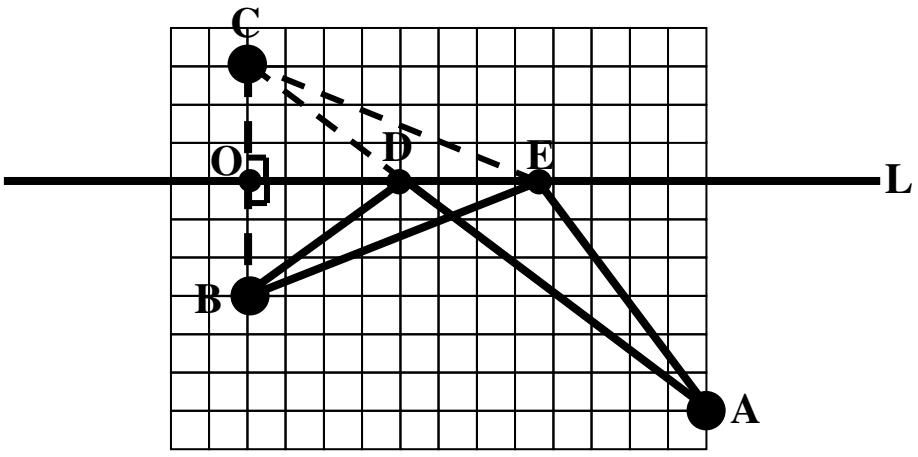


ניתן לפשט את השרטוט ולשאול את השאלות הבאות:
האם הדרך הקצרה ביותר מנקודה **A** אל נקודה **B**, כאשר בדרך נוגעים בישר **L**, היא ללכת אל כיוון התמונה של **B** ביחס לישר **L**? מהו אורכה של דרך זו?



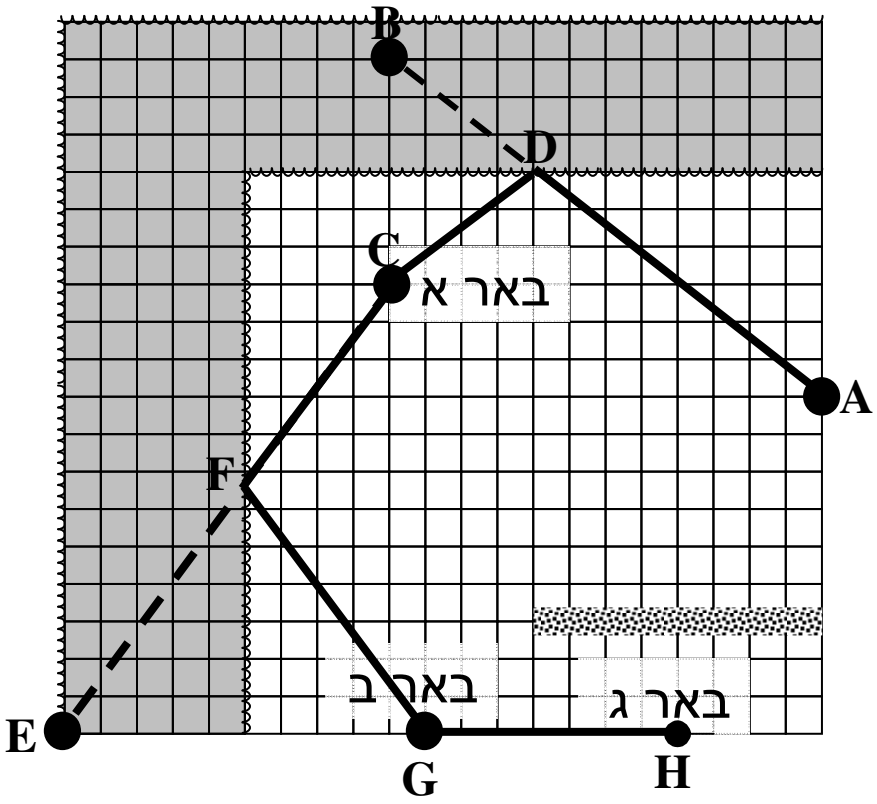
ראשית, חשוב לשים לב שהמסלול **A-D-B** שווה באורכו למסלול הישר **A-D-C**, כיוון שהמשולשים **ODB** ו- **ODC** הם חופפים, ולכן **DC=DB**.

נשרטט כעת מסלול אחר (**A-E-B**), שנוגע בישר **L** בנקודה אחרת.



המסלול **A-E-B** שווה באורכו למסלול **A-E-C**, כיוון ש: **EB=EC**.
עלינו להשוות בין המסלול **A-D-C** לבין **A-E-C**. שני המסלולים האלה נמצאים במשולש **ACE**. מאחר שסכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית, נקבל שהמסלול **A-D-C** קצר יותר.
קיבלנו שהמסלול המתקדם אל תמונת המטרה הוא הקצר ביותר.

כעת נוכל לחשב בנקל את אורך המסלול הכולל בעזרת משפט פיתגורס:



ראשית, נשים לב שאכן מתקיים הכלל הראשון במדבר: אין הליכה של יותר מ- 10 ק"מ בין מקורות המים. שימו לב לכך שהנקודה **D** נפלה על קדקוד של הרשת הריבועית, אותו בוודאי קיבלו התלמידים בניסיונות חיפוש המסלול שביצעו בתחילת השיעור. אורך הקטע **AD** הוא בדיוק 10 ק"מ וברור שאורך הקטע **CD** קצר מ- 10 ק"מ. קל לראות, אפילו במבט עין, שאורכי הקטעים **CF** ו- **FG** קצרים מ- 10 ק"מ. שימו לב לכך שהנקודה **F** אינה קדקוד של הרשת. עובדה זו היא שגרמה לקושי בניסיונות התלמידים למצוא את המסלול המבוקש.

האורך המבוקש הוא **AB+CE+GH**. את אורכי הקטעים **AB** ו- **CE** ניתן לחשב בקלות בעזרת משפט פיתגורס: $AB = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ וגם $CE = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

אורך המסלול הוא **15+15+7=37** קילומטרים בדיוק.

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך המכון למצוינות בהוראה

נספח: שיעור הכנה – משפט פיתגורס

כאמור במבוא, יש לקיים שיעור הכנה לשיעור של מדבר פיתגורס. נציג כאן הצעה לשיעור כזה, בו יוצג משפט פיתגורס, תתגלה הוכחה שלו, ויתורגלו התרגילים הרלוונטיים שיהיה להם שימוש בשיעור המדבר. שיעור זה אינו דומה לשיעורים אחרים בתכנית והרעיונות יוצגו בצורה נקודתית מתומצתת. בנוסף, חשוב לציין שבחלק מספרי הלימוד בתוכנית הלימודים הרגילה מוצג משפט פיתגורס באופן דומה.

הערה:

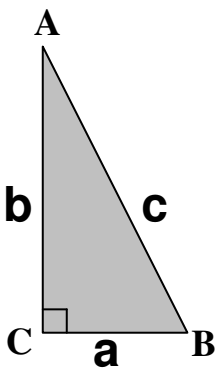
באפשרותכם לבנות שיעור הכנה שונה מהמוצע כאן, ואולי אף לוותר על ההוכחה הפורמאלית של המשפט. אפשר למשל להציג לתלמידים את משפט פיתגורס תוך שימוש באתר האינטרנט הבא: **http://www.orianit.edu-negev.gov.il/pit/**

שלב ראשון – הצגת משפט פיתגורס

מניסיוננו, חלק מהתלמידים כבר שמעו על המשפט. תוכלו להיעזר בהם כדי להציגו:

בכל משולש ישר זווית מתקיים: סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

$$a^2+b^2=c^2$$



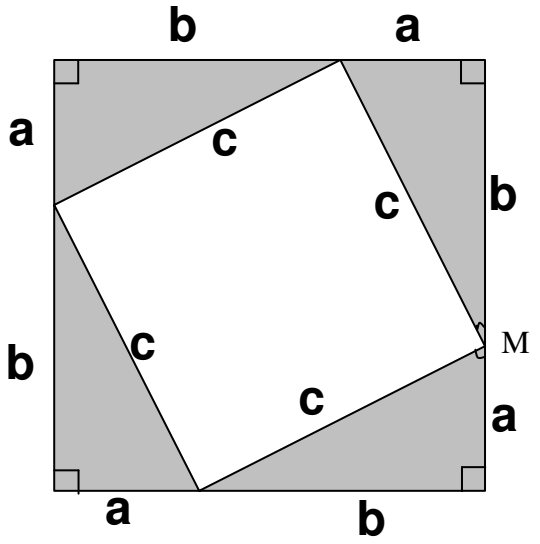
בשלב זה אנו ממליצים לשאול את התלמידים: מהו השטח של המשולש ABC?

שטח המשולש שווה למחצית מכפלת הניצבים (צלע (b) כפול בסיס לאותה צלע (a) והתוצאה חלקי 2):

$$\frac{1}{2}ab$$

שלב שני – הוכחת המשפט

ניקח 4 משולשים ישרי זווית, כמו זה הנתון במשפט, ונרכיב אותם באופן הבא:



בשרטוט רואים ריבוע גדול שאורך צלעו (a+b), המורכב מארבעה משולשים, כמו זה המקורי, וממרובע נוסף שכל צלעותיו הן באורך c. הפנו אל התלמידים את השאלה: מהו מרובע זה? הם בוודאי יאמרו שזהו ריבוע, ותשובתם אכן נכונה. הקשו עליהם בכך שתאמרו שאתם מסכימים שצורה זו היא בוודאי מעויין, כיוון שארבע צלעותיה שוות, אך בקשו מהם להסביר מדוע זוויותיה ישרות.

ההסבר לכך אינו מסובך. סכום שתי הזוויות החדות של כל משולש ישר זווית הוא 90^0. אם נסתכל על הזווית השטוחה סביב הקדקוד שסימנו באות M, נראה שהיא מורכבת מ- 3 זוויות: שתי הזוויות החדות של המשולש המקורי שסכומן 90^0, ועוד זווית שלישית שחייבת להיות גם כן 90^0. המרובע הפנימי הוא אם כן ריבוע.

בשלב זה עליכם לבקש מהתלמידים לחשב את שטח המרובע הגדול בשתי דרכים:

- באופן ישיר – הצלע שלו כפול עצמה: (a+b)×(a+b)
- באופן עקיף: חיבור השטחים של הצורות המרכיבות אותו:

  ארבעה משולשים כמו זה המקורי: $4\times\frac{1}{2}ab=2ab$

  והריבוע הפנימי: c^2.

מהשוואת השטחים שהתקבלו בשתי השיטות נקבל את משפט פיתגורס:

$$(a+b)\times(a+b)=2ab+c^2$$

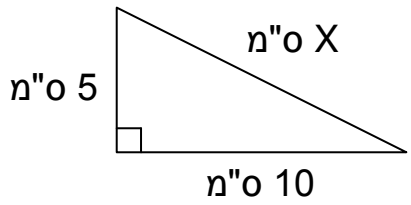
$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

שלב שלישי – תרגול בסיסי של משפט פיתגורס

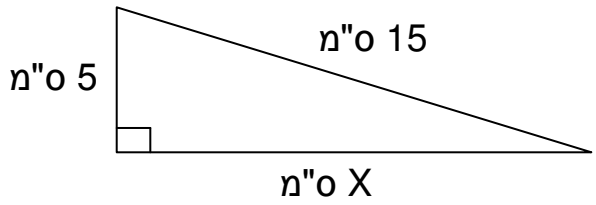
בשלב זה, תרגלו עם התלמידים שני סוגים של תרגילים. בסוג הראשון יש לחשב את אורכו של היתר ובסוג השני יש לחשב את אורכו של אחד מהניצבים. הנה דוגמאות לשני תרגילים:

- חשבו את אורכו של היתר במשולש ישר הזווית הבא:



פתרון: $x^2=5^2+10^2=125$ **ואז** $x=\sqrt{125}\approx 11.18$

- חשבו את אורכו של הניצב שאורכו אינו נתון, במשולש ישר הזווית הבא:



פתרון: $x^2+5^2=15^2$ **ואז** $x^2=15^2-5^2=200$ **ואז** $x=\sqrt{200}\approx 14.14$

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך המכון למצוינות בהוראה

שלב רביעי – שלשות פיתגוריות

הציגו לתלמידים את הרשימה הבאה של המספרים הריבועיים מ- 1^2 ועד 15^2, ובקשו מהם למצוא מתוכם שלשות של מספרים שלמים a,b,c המקיימים את משוואת פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

פתרון: מציאת שלשות של מספרים טבעיים המקיימים את המשוואה של פיתגורס העסיקה את המתמטיקאים שנים רבות. באנציקלופדיה הוירטואלית של ויקיפדיה ניתן לקרוא מעט הסטוריה על הנושא, ואף למצוא שם נוסחה המאפשרת לייצר את כל אינסוף השלשות הפיתגוריות האלה.

בטבלה לעיל אפשר לגלות את השלשה הפיתגורית הקטנה ביותר: 3,4,5. לא קשה לבדוק שכל הכפלה של שלושת האיברים של שלשה פיתגורית באותו מספר טבעי, יוצרת שלשה פיתגורית נוספת. כך ניתן לגלות ברשימה את שתי השלשות הפיתגוריות הבאות, הנוצרות בזכות השלשה 3,4,5: 6,8,10 ו- 9,12,15. בנוסף, ניתן לגלות ברשימה שלשה פיתגורית אחרת: 5,12,13.

ידיעה בעל-פה של השלשות הפיתגוריות אותן הצגנו יכולה להקל על החישובים בפעילות המדבר.