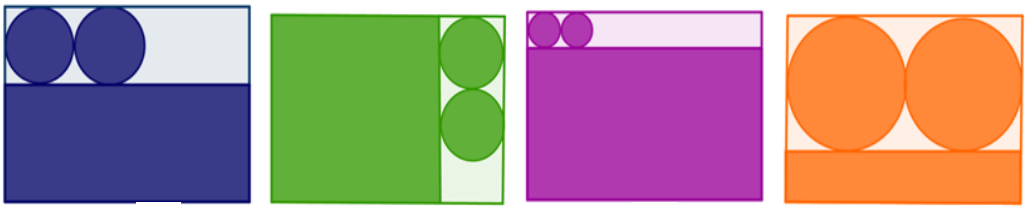
يوم π سعيد – حلول

2. علبة الحلوى



أ ب ج د

أ) نتمعن في الفرش "أ" :
نتذكر أن أطوال الورق المقوى (الكرتون) 70×50، لذا نصف قطر كل من الدائرتين : $r = 70 : 4 = 17.5$.
ومحيط الدائرة يجب أن يحقق : $2\pi r \le 70$ نعوّض r=17.5 ونحصل على $2\pi \cdot 17.5 \le 70 \Leftarrow \pi \le 2$
لذا، الاستنتاج : لا يمكن بناء اسطوانة من الفرش الأول .

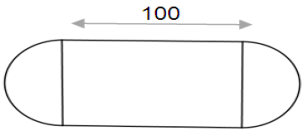
ب) نتمعن في الفرشين "ب " و "د" .
يجب أن يتحقق : $2\pi r \le 70$ ومن هنا : $r \le 11.14$ ، وكما نرى في الشكلين ب و د $r < 17.5$ لدائرتين.
استنتاج : يمكن بناء اسطوانة من كل من الفرشين ب و د .
تبقى الفرش "ج" ، بالنسبة للدائرتين يتحقق: $4r < 50 \Rightarrow r < 12.5$. وهنا توجد امكانيتان للغلاف :
أو $2\pi r \le 50 \Rightarrow r \le \frac{50}{2\pi} = 7.96$ (2) . في الحالتين يتحقق $r < 12.5$.
الاستنتاج : يمكن بناء اسطوانة أيضًا من الفرش ج

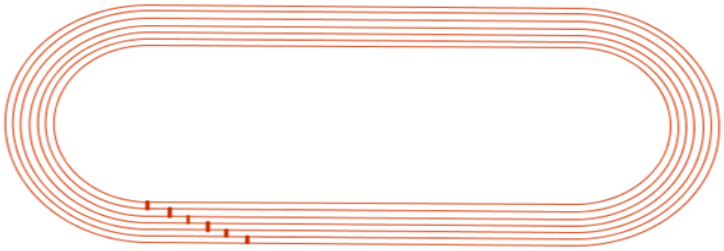
ج) نعم يمكن بناء اسطوانة يكون ارتفاعها يساوي محيط قاعدتها الدائرية . لنتمعن في الفرش "ج" ، ولنأخذ :
$2\pi r = h = 50$ وعندها : r=7.96 وللدائرتين يبقى شريط بعرض 20 . يوجد مساحة كافية لدائرة أي :
$2r = 2 \cdot 7.96 = 15.92 < 20$.

د) أية اسطوانة لها أكبر حجم؟ من الواضح إذا اردنا أن نختار بين الفرشين ب و د ، علينا أن نختار الفرش د. قانون حساب حجم الاسطوانة هو: $V = \pi r^2 h$ ، عندما يكون نصف القطر أكبر يكون الحجم أكبر . لنأخذ مثلاً : r=11.14 (انظر البند أ) ، يكون الارتفاع : $h = 50 - 2 \cdot 11.14 = 27.72$ والحجم: 10807 وحدات حجم. وإذا كان مثلاً : r=8 و h=34 (انظر الفرش ب) ، يكون حجم الاسطوانة : 6836 وحدات حجم.
يمكن اجراء البحث بواسطة حساب التفاضل ، نسجل دالة حجم الاسطوانة كدالة نصف قطر القاعدة :
$y = \pi r^2 (50 - 2r)$ عندما $r \le 11.14$. مشتقة الدالة : $y' = 2\pi r (50 - 3r)$. يكون للدالة نهاية عظمى عندما r=16.67 وهذا لايحقق الشرط $r \le 11.14$ ، لذا الاسطوانة التي لها أكبر حجم هي تلك التي فرشها بين الفرشين ب و د ، وهي الاقرب الى د . والحجم الأكبر هو : 10807 وحدات حجم.
وأما بالنسبة للفرش ج : نفرض أن ارتفاع الاسطوانة مساويًا لمحيط قاعدتها . نصف قطر الدائرة (القاعدة) r=7.96 (انظر البند ب) وحجم الاسطوانة $V = \pi (7.96)^2 \cdot 50 = 9952.8$
الاستنتاج: علبة الحلوى التي تتسع لأكبر كمية ممكنة تكون مبنية من الفرش د !

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

3. سباق π





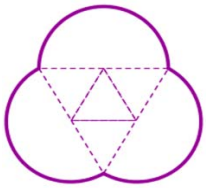
أ) طول كل واحد من القوسين هو 100 م . نصف قطر القوس والذي هو نصف دائرة $r=\frac{100}{\pi}$ ، إذا كان طول المستطيل 100 م ، يكون طول الملعب : $100+2r=100+\frac{200}{\pi}=163.67$ وعرضه $2r=63.67$. لذا أطوال الملعب : 163.67م و 63.67 م .

ب) طول المسار الخارجي 400 م . نحسب طول المسار الداخلي : طول القطعة المستقيمة من المسار لا تتغير وتساوي 100 م . طول نصف الدائرة يقصر من مسار الى آخر. نصف قطر نصف الدائرة في المسار الداخلي يساوي : r-5 وعندها طول المسار الداخلي:

$$2\left[\pi(r-5)+100\right]=2\left[\pi\left(\frac{100}{\pi}-5\right)+100\right]=400-10\pi=368.58$$

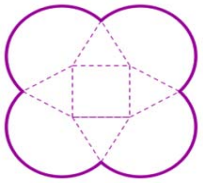
ج) الفرق بين أطوال المسارات هو 10π . لذا نقطة انطلاق روني تقع على بعد $10\pi=31.42$ أمام رائد.

4. أزهار π



أ) **زهرة لها ثلاث ورقات تويج**

كل ورقة تويج هي نصف دائرة (الزاوية المركزية المقابلة لها 180°) مبنية على قطر طوله 2 . محيط الزهرة : 3π



ب) **زهرة لها أربع أوراق تويج**

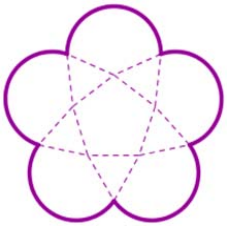
الزاوية المركزية المقابلة لكل ورقة تويج تساوي :

$360°-(60°+90°+60°)=150°$ وبالرديان $\frac{5\pi}{6}$. طول ضلع المربع 1 ، لذا نصف قطر القوس هو 1 أيضًا . طول القوس يساوي حاصل ضرب الزاوية المركزية (بالرديان) في نصف القطر أي : $\frac{5\pi}{6}$. و محيط الزهرة : $4\cdot\frac{5\pi}{6}=\frac{10\pi}{3}$

.

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

ج) **زهرة لها خمس أوراق تويج**



الزاوية الداخلية في المخمس تساوي : 108º . لذا الزاوية المركزي المقابلة للقوس (ورقة التويج) تساوي :

$360°-\left(60°+108°+60°\right)=132°$ وبالرديان $\frac{11\pi}{15}$

طول ضلع المخمس هو 1 ، نصف قطر القوس يساوي 1 أيضًا.

طول القوس يساوي حاصل ضرب نصف القطر في مقدار الزاوية المركزية للقوس (بالرديان) أي: $\frac{11\pi}{15}$ ومحيط الزهرة : $5\cdot\frac{11\pi}{15}=\frac{11\pi}{3}$

د) **زهرة لها ست أوراق تويج**

الزاوية الدخلية للمسدس تساوي 120º. الزاوية المركزية المقابلة لكل ورقة تويج تساوي:

$360°-\left(60°+120°+60°\right)=120°$ **وبالرديان** $\frac{2\pi}{3}$ ومحيط الزهرة $6\cdot\frac{2\pi}{3}=4\pi$

ه) **زهرة لها n أوراق تويج .**

الزاوية الداخلية للمضلع الذي له n أضلاع تساوي: $180°-\frac{360°}{n}$

الزاوية المركزية المقابلة لكل ورقة تويج تساوي:

$360°-\left[\left(180°-\frac{360°}{n}\right)+60°+60°\right]=60°+\frac{360°}{n}=60°\left(1+\frac{6}{n}\right)$ وبالرديان :

$\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{6}{n}\right)$ لذا محيط الزهرة يساوي : $n\cdot\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{6}{n}\right)=\pi\left(\frac{n}{3}+2\right)$

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -– הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il