חקירה מונחית המולידה הפתעות והרכבת שאלות על-ידי תלמידים

אבי סיגלר ושולמית אליקן

בחלק הראשון של המאמר מוצג אוסף של משימות בגאומטריה על-פי תכנית הלימודים של כיתה י ברמת 5-4 יח"ל. אוסף המשימות מדורג מבחינת קושי ומהווה קרקע מתאימה לפיתוח שיעור המאפשר חקר וגילוי מתמטי. אוסף המשימות הורכב על-ידי ד"ר אבי סיגלר. בחלק השני של המאמר מתואר שיעור שהתרחש בכיתה. השיעור הועבר על-ידי שולמית אליקן בכיתה י, ברמה של 5 יח"ל, בבית הספר למדעים ואומנויות בנהריה.

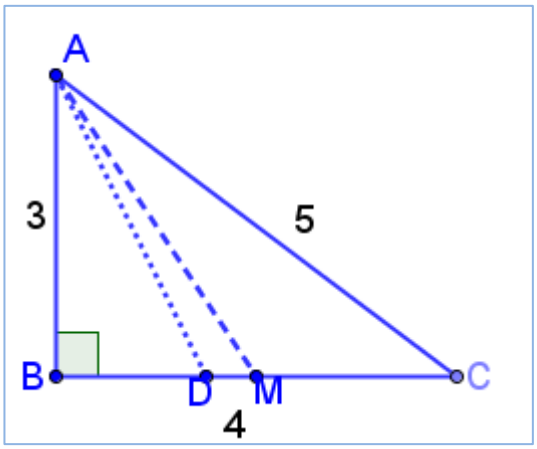
משימות, ד"ר אבי סיגלר

משימה ראשונה

במשולש המצורי: $AB=3$, $BC=4$, $AC=5$

AD הוא חוצה זווית, AM תיכון.

על התלמידים למצוא את אורך DM ו- BD והיחס בין BD ל- DM.



איור 1

פתרון:

לפי משפט חוצה הזווית, במשולש ΔABC , $\frac{BD}{DC}=\frac{3}{5}$

לכן: $BD=1\frac{1}{2}$.

$BM=\frac{1}{2}BC=2$, לכן $DM=\frac{1}{2}$,

ולכן:

$\frac{BD}{DM}=3$.

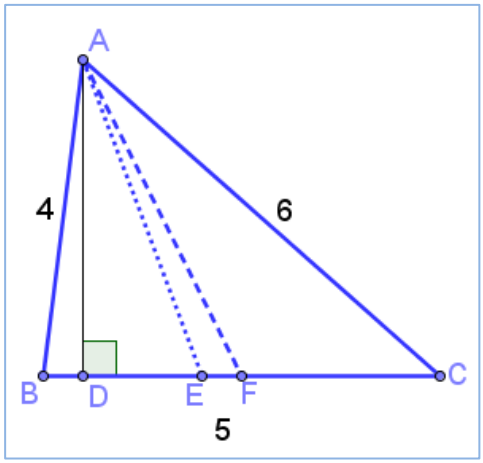
משימה שנייה

(מקרה דומה למשימה הראשונה)

במשולש ΔABC , $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$,

AD גובה, AE חוצה זווית ו- AF תיכון.

יש לחשב את אורך EF ו- DE , ואת היחס בין DE ל- EF.



איור 2

פתרון:

לפי משפט חוצה הזווית $\frac{BE}{EC}=\frac{4}{6}$, לכן: $BE=2$.

$BF=2\frac{1}{2}$,

לכן: $EF=\frac{1}{2}$.

כלומר, גם במקרה זה המרחק בין "עקב" חוצה הזווית ל"עקב" התיכון (כלומר אורך הקטע EF) הוא $\frac{1}{2}$, כמו במשימה הראשונה (הפתעה!). לפי משפט פיתגורס המופעל במשולשים ΔABD ו- ΔADC קיים:

$6^2-(5-BD)^2=4^2-(BD)^2$,

לכן: $BD=\frac{1}{2}$,

ולכן: $DE=1\frac{1}{2}$.

שוב הפתעה. גם במקרה זה המרחק בין "עקב" חוצה הזווית ל"עקב" הגובה הוא $1\frac{1}{2}$, כמו במשימה הראשונה.

לכן: $\frac{DE}{EF}=3$ כקודם.

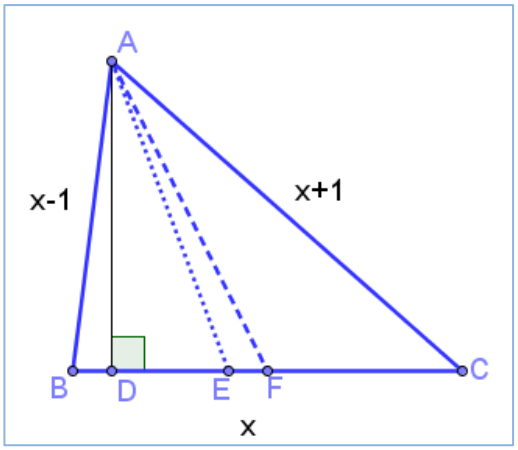
מסקרן! מה היה המשותף לשתי המשימות? הצלעות היו שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית בעלת הפרש 1.

משימה שלישית

(הכללה)

במשולש ΔABC בו: $AB=x-1$, $BC=x$, $AC=x+1$ גובה, AD, AE חוצה זווית, AF תיכון.

יש לחשב את אורכי EF, DE, ואת היחס $\frac{DE}{EF}$ (ניתן לבטא באמצעות x, אם יש צורך).



איור 3

פתרון:

לפי משפט חוצה הזווית:

$\frac{BE}{x-BE}=\frac{x-1}{x+1} \Leftarrow \frac{BE}{EC}=\frac{x-1}{x+1}$

לכן: $\frac{BE}{x}=\frac{x-1}{2x}$

ולכן: $BE=\frac{x-1}{2}$.

$BF=\frac{x}{2}$ ו- $EF=\frac{1}{2}$.

משפט פיתגורס המופעל במשולשים ΔABD ו- ΔADC, מאפשר את חישוב BD.

$(x-1)^2-(BD)^2=(x+1)^2-(x-BD)^2$

לאחר העברת אגפים:

$(x+1)^2-(x-1)^2=(x-BD)^2-(BD)^2$

$\Downarrow$

$4x=x^2-2x\cdot BD \Rightarrow BD=\frac{x-4}{2}$

$DE=BE-BD$

לכן:

$DE=\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{2}=1\frac{1}{2}$.

$DE=1\frac{1}{2}$ ו- $\frac{DE}{EF}=3$.

הפתעה גדולה! אם אורכי AB , BC ו- AC הם שלושה איברים בסדרה חשבונית שהפרשה 1, הקטעים EF ו- DE אורכם $\frac{1}{2}$ ו- $1\frac{1}{2}$ בהתאמה, ולא חשוב אם הצלעות הן $3,4,5$ או $207,208,209$.

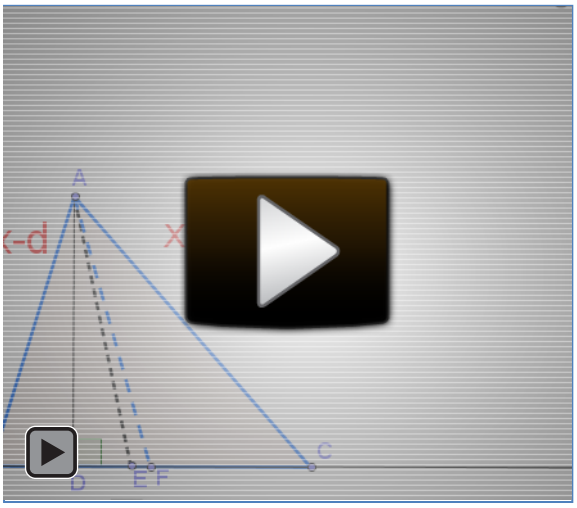
משימה רביעית

(הכללה של המשימה השלישית)

ומה אם אורכי AB , BC ו- AC מהווים סדרה חשבונית שהפרשה $d>0$?

האם אפשר על סמך התוצאות של המשימה השלישית למצוא את אורכי EF , DE ואת היחס $\frac{DE}{EF}$?

בסרט הבא ניתן לראות כי לכל d ולכל x שנבחר היחס ימשיך להתקיים:



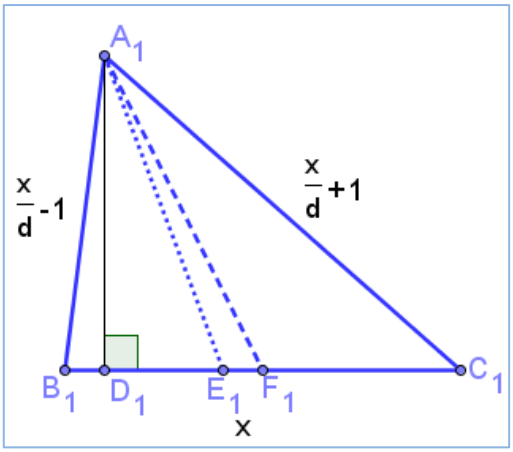
סרט 1

פתרון:

נניח $AB=x-d$, $BC=x$, $AC=x+d$.

נסתכל על המשולש $\Delta A_1B_1C_1$ שצלעותיו:

$A_1B_1=\frac{x}{d}-1$, $B_1C_1=\frac{x}{d}$, $A_1C_1=\frac{x}{d}+1$.



איור 4

במשולש זה (לפי המשימה השלישית) הקטעים המתאימים E_1F_1 ו- D_1E_1 הם באורכים $\frac{1}{2}$ ו- $1\frac{1}{2}$ בהתאמה,

לכן, במשולש ΔABC הדומה ל- $\Delta A_1B_1C_1$:

$EF=\frac{1}{2}d$, $DE=1\frac{1}{2}d$, והיחס $\frac{DE}{EF}$ הוא 3.

משימה חמישית

(הכללה של המשימה הרביעית)

כעת נראה מה מתרחש כאשר היחס בין הצלעות מקיים קשר כלשהו, שסדרה חשבונית היא מקרה פרטי שלו.

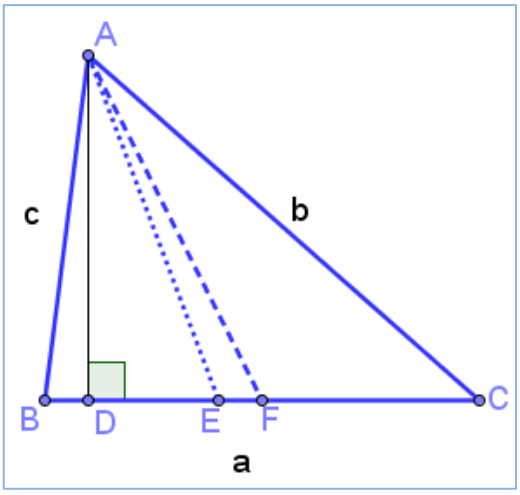
במשולש ΔABC שאורכי צלעותיו $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, נסמן $\frac{c+b}{a}=k$. ברור ש: $k>1$.

(במשימה הרביעית $k=2$ כי אורכי הצלעות היוו סדרה חשבונית).

כמו קודם, D,E,F הם עקבי הגובה, חוצה הזווית, והתיכון.

התלמידים מתבקשים להביע את אורכי EF , DE ואת היחס $\frac{DE}{EF}$.

כדי להימנע מן התלות בסרטוט נניח גם שהמשולש ΔABC חד-זווית.



איור 5

פתרון:

לפי משפט חוצה הזווית:

$$\frac{BE}{EC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BE}{a-BE}=\frac{c}{b}\Rightarrow BE=\frac{ac}{b+c}$$

לכן:

$$EF=BF-BE=\frac{a}{2}-\frac{ac}{b+c}=\frac{a(b+c)-2ac}{2(b+c)}$$

$$EF=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

על-ידי הפעלת משפט פיתגורס על המשולשים ΔABD ו-ΔADC, או על-ידי הפעלת משפט הקוסינוסים נקבל כי:

$$BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$, כמו כן, $$BE-BD=DE$$

ועל-ידי ביצוע מכנה משותף ופירוק לגורמים נקבל:

$$DE=\frac{(b-c)(b+c+a)(b+c-a)}{2a(b+c)}$$

מכאן:

$$\frac{DE}{EF}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{a^2}$$

נביע את היחס $\frac{DE}{EF}$ בעזרת k בלבד:

(נזכור $k=\frac{b+c}{a}$).

$$\frac{DE}{EF}=\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}=\left(\frac{b+c}{a}\right)^2-1=k^2-1$$

מפתיע! פונקציה של k בלבד.

ואכן, אם $\frac{b+c}{a}=2$ ו- $d=a-c=b-a$ נקבל:

$$EF=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}=\frac{1(2d)}{2\cdot 2}=\frac{d}{2}$$

$$DE=\frac{(b-c)(b+c+a)(b+c-a)}{2a(b+c)}=\frac{2d\cdot 3a\cdot a}{2a\cdot 2a}=\frac{3d}{2}$$

(השוויונות נובעים מהמשימה החמישית).

"ניצול הצלחה"

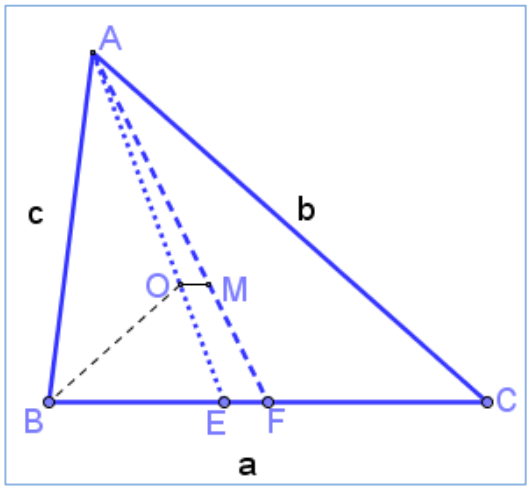
הרכבת שאלות הקשורות לתוצאות שהתקבלו בחמש המשימות

שאלה 1

במשולש ΔABC, אורכי הצלעות b,a,c מהווים סדרה חשבונית שהפרשה d. M הוא מרכז הכובד ו-O מרכז המעגל החסום במשולש ΔABC.

א. הוכיחו כי $OM \parallel BC$.

ב. חשבו את OM.



איור 6

פתרון:

ברור כי: BO הוא חוצה הזווית $\sphericalangle B$.

הוכחנו כי: $BE=\frac{ca}{b+c}$. לכן לפי משפט חוצה הזווית,

במשולש ΔABE:

$$\frac{AO}{OE}=\frac{C}{BE}=\frac{C}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a}=2$$

אבל M היא מפגש התיכונים, לכן: $\frac{AM}{MF}=2$.

לכן, לפי משפט הפוך למשפט תאלס: $OM \parallel BC$.

לפי המשימה הרביעית $EF=\frac{d}{2}$.

ממשפט תאלס נובע כי: $\frac{OM}{EF}=\frac{AM}{AF}=\frac{2}{3}$.

לכן: $\frac{OM}{\frac{d}{2}}=\frac{2}{3}$ ומכאן: $OM=\frac{d}{3}$.

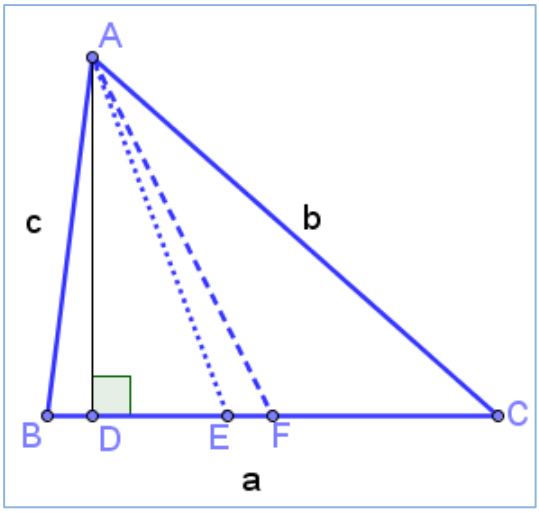
שאלה 2

במשולש ΔABC, שצלעותיו הן a,b,c, AD הוא גובה, AE חוצה זווית, AF תיכון.

היחס: $\frac{b+c}{a}=k$.

אם k הוא יחס חתך הזהב, אז הוכיחו שגם:

$\frac{DE}{EF}=k$.



איור 7

פתרון:

לפי המשימה החמישית $\frac{DE}{EF}=k^2-1$.

אם k הוא יחס חתך הזהב מתקיים $k^2-k-1=0$.

כלומר, $\frac{DE}{EF}=\frac{b+c}{a}=k$.

(יחס חתך הזהב הוא $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

שאלה 3

במשולש שהיקפו $20\sqrt{2}$ ס"מ, AD גובה, AE חוצה זווית, ו- AF תיכון.

נתון גם כי: AE הוא תיכון במשולש ΔADF.

חשבו את אורך הצלע BC (ראו איור 6).

פתרון:

אם $\frac{b+c}{a}\equiv k$, הוכיחו ש: $\frac{DE}{EF}=k^2-1$.

במקרה שלנו, $\frac{DE}{EF}=1$ לכן, $k=\sqrt{2}$.

כלומר:

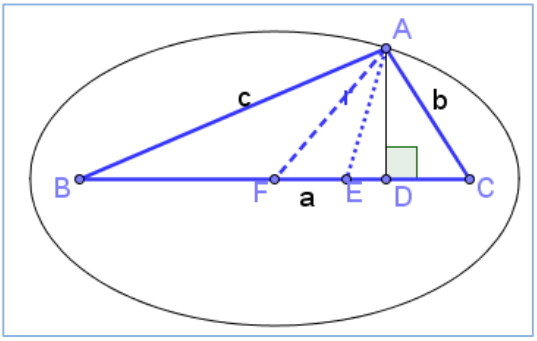
$$\frac{b+c+a}{a}=\sqrt{2}+1 \Leftarrow \frac{b+c}{a}=\sqrt{2}$$

ואז מקבלים כי: $a=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

שאלה 4

באליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ שמוקדיה הם B ו-C, הנקודה A שעליה והנקודות B ו-C יוצרות משולש. במשולש זה AD גובה, AE חוצה זווית, ו-AF תיכון.

חשבו את היחס $\frac{DE}{EF}$.



איור 8

פתרון:

באליפסה הנתונה $b+c=10$, $a=\sqrt{25-9}\cdot 2=8$

(כי אורך הציר הגדול במקרה זה 10 והציר הקטן 6.)

לכן, $k=\frac{b+c}{a}=\frac{5}{4}$. הוכחנו כי: $\frac{DE}{EF}=k^2-1$,

לכן: $\frac{DE}{EF}=\frac{2}{16}$.

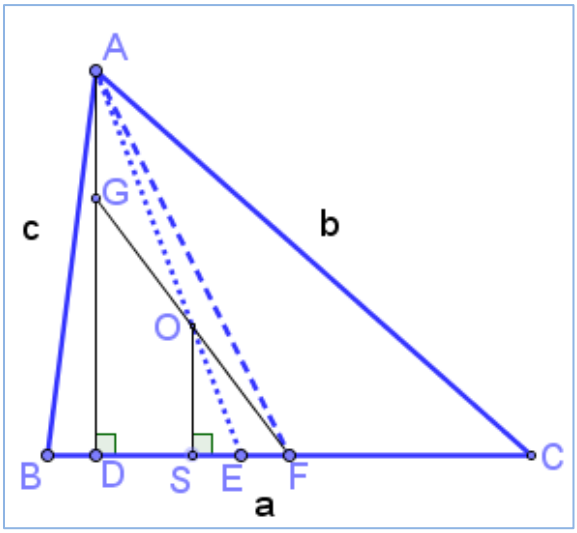
שאלה 5

במשולש ΔABC, F אמצע BC, O מרכז המעגל החסום, AD גובה.

המשך FO פוגש את AD ב-G.

הוכיחו: $r=AG$

(r - רדיוס המעגל החסום ב-ΔABC).



איור 9

פתרון:

הוכחנו שאם $\frac{b+c}{a}\equiv k$ אז גם $\frac{AO}{OE}=k$.

הוכחנו גם כי: $\frac{DE}{EF}=k^2-1$.

לכן: $\frac{DF}{EF}=k^2$ (תכונת פרופורציה).

לכן, לפי משפט מנלאוס במשולש ΔADE קיים:

$$\frac{DF}{EF}\cdot\frac{EO}{OA}\cdot\frac{AG}{GD}=1$$

$$(1)\quad k^2\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{AG}{GD}=1\Rightarrow\frac{AG}{GD}=\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{AG}{AD}=\frac{1}{k+1}$$

נעביר $OS\perp BC$. ברור כי: $OS=r$.

לפי משפט תאלס במשולש ΔADE קיים:

$$\frac{r}{AD}=\frac{OS}{AD}=\frac{OE}{AE}$$

אבל ידוע כי:

$$\frac{AO}{OE}=k\Rightarrow\frac{OE}{AO}=\frac{1}{k}$$

לכן: $\frac{OE}{AE}=\frac{1}{k+1}$, ומכאן גם: $(2)\quad\frac{1}{k+1}=\frac{R}{AD}$

לפי (1) ו-(2) נקבל: $r=AG$.

סיכום אוסף המשימות

במאמר הוצגה חקירה מונחית, המאפשרת לתלמידים להתקדם ממקרה פרטי אל הכללה, תוך שימוש במאגר ידע מצומצם וזמין: משפט טלס, משפט חוצה הזווית, משפט פיתגורס, והגדרת סדרה חשבונית. חלק מן התוצאות מאוד מפתיעות ומעוררות סקרנות להמשיך להתעמק ולחקור.

חמש השאלות שהוצגו, חלקן חישוביות וחלקן של הוכחה, מבוססות על תוצאות החקירה, להן נוספו 3 פרטי ידע: חתך הזהב, הגדרת אליפסה ומשפט מנלאוס.

אני ממליץ למורים לנסות להנחות את החקירה, להדגיש את ההפתעות, להציג חלק מן השאלות, ולבקש מן התלמידים רעיונות נוספים לשאלות חדשות.

תיאור המתרחש בכיתה, הלכה למעשה, שולמית אליקן

כעת יתואר מהלך של שיעור שבו ניתנו המשימות לתלמידים, בכתה י' ברמה של 5 יח"ל. הכותבת היא המורה בכתה, שולמית אליקן.

לאחר קריאת אוסף המשימות שד"ר סיגלר העביר אליי, החלטתי לאמץ את המלצתו ולנסותה בכיתה י שלי. בכיתה 33 תלמידים ברמת 5 יחידות לימוד.

במהלך השיעור הצגתי לתלמידיי את המשימה הראשונה כעבודת כיתה. התלמידים הגיעו לפתרון מיידי. לאחר מכן הוצגה להם המשימה השנייה, ואז הגיעה ההפתעה הראשונה, כאשר גילו תוצאה זהה: *מה? מה תמיד קורה?*

השאלה שהוצגה עבורם בשלב זה כבר עסקה בניסיון להגיע להכללה: *מה תוכלו לומר על סוג המשולש בו מתקיימת התוצאה שקיבלתם במשימות 1 ו- 2?*

מיד עלו רעיונות כגון: *כי שוויה של צלעות באורכים של מספרים עוקבים, כמו: 9,8,7*, או: *שוש צלעות, כך שבאמצע בסם קטנה ב- 1 ובסם גדולה ב- 1.*

עודדתי את התלמידים לנסח לעצמם את הטענה ואחר כך כמובן להוכיחה, כשאני מציינת שהם עובדים כרגע כמתמטיקאים צעירים.

המוטיבציה הייתה גדולה ,כולם ללא יוצא מן הכלל ניסו להוכיח כי: $EF = \frac{1}{2}, \frac{DE}{EF} = 3$. ואיזו שמחה גרמה ההצלחה!

ואז שאל אחד התלמידים: *האם זה נכון רק במקרה שההפרש בין המספרים הוא 1?*

תלמידה אחרת ענתה לו: *אבל אמרנו שצלע שווה של מספרים עוקבים!* ומישהו אחר ענה: *בואו נעשה עם סתם מספרים!*

כאן התערבתי והפניתי את השאלה לכיתה: *מה קורה, למשל, במשולש שאורכי הצלעות שלו הם: 12,17,22?*

התגובה הייתה: *איך הצלת למספרים האלה? מה זה?*

והתשובה לא אחרה לבוא מאחד התלמידים: *לי, כן שווה של מספרים שההפרש בינהם קבוע, 5, לא?*

- *מה, זה עם יצא $\frac{1}{2}$?*

תשובת המורה: *תבדקו!*

אכן היחס נשאר 3, אבל, אכזבה: $EF = 2\frac{1}{2}$.

ואז נפתח הדיון, *מה קרה כאן?*

חלק מהתלמידים בדקו שלשה אחרת של מספרים עם הפרש קבוע אחר וגילו תוצאות שונות. רשמתי את התוצאות שלהם על הלוח. התשובה לא אחרה לבוא: EF *הוא חצי מההפרש שבין המספרים.*

שאלתי: *האומנם? – תוכיחו!* פה התעוררה בעיה קטנה בניסוח הפורמלי והתלמידים נזקקו לעזרתי. סימנו את ההפרש באות d, והגדרנו את מה שנרצה להוכיח.

ההוכחה לא אחרה לבוא, אך השיעור הסתיים.

התלמידים קיבלו כשיעורי בית את המשימה החמישית, וכמו כן, התבקשו לתאר בכתב את תחושותיהם לגבי השיעור. הנה כמה מהתגובות:

- *שיעור מעניין, איזה כיף היה לפתור בעיות.*
- *תעשי לנו עוד שיעורים כאלה.*
- *כל הזמן שולי אמרה שאנחנו כמו מתמטיקאים צעירים, זה נותן חשק להרגיש חוקרים.*
- *יותר כיף מלפתור סתם תרגילים.*
- *סוף, סוף אני פוגש שיעורים בבית ספר שדורשים ממני קצת יותר לחשוב, הלוואי שהיו עוד שיעורים כאלה...*
- *היה קצת רעש ובלגן בכיתה...*
- *ואני לא הבנתי מה עוד יש לחקור במתמטיקה, חשבתי שהכל כבר ידוע מראש, עכשיו אני מבין שאין סוף...*
- *היה שיעור נחמד כי כולם עבדו יחד וניסו למצוא דברים...*

לצערי מפאת חוסר הזמן לא המשכנו את שאר המשימות מהאוסף שהציע אבי.

השיעור המתואר איפשר "טעימה" קטנה והצצה לתוך עולם של חקר וגילוי. אין ספק כי גם התלמידים וגם אני המורה חווינו שיעור מרתק ומעניין.

ד"ר אבי סיגלר

מנהל פדגוגי ומורה למתמטיקה, בבית הספר הטכני של חיל האוויר בחיפה.