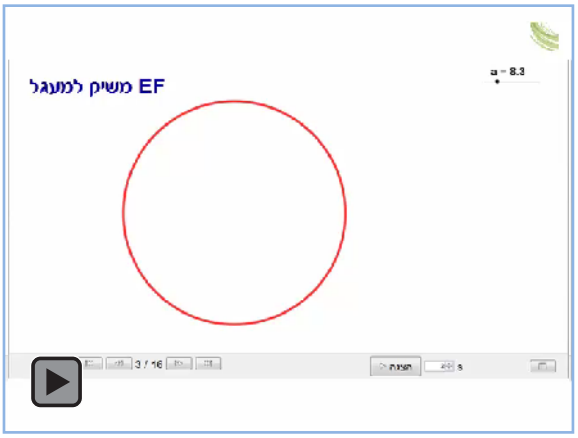
משולחנו של מורה ותיק

בשארה ג'אסר (אבי סיגלר)

לפני שנים רבות נתקלתי בבעיה בספר מתמטיקה שיצא לאור במצריים. הצלחתי לפתור את הבעיה בשיטות של גאומטריה אנליטית, אך לא מצאתי הוכחה בגאומטריה סינטטית, פרט למקרים פרטיים שיפורטו בהמשך. במהלך עבודתי נזכרתי באמרה: "לעתים בגאומטריה אם לא מוצאים פתרון ב- 5 דקות, לא ברור אם נמצא פתרון ב- 5 שנים". אך באדיבות מערכת "על"ה" יצרתי קשר עם ד"ר אבי סיגלר ויחד מצאנו הוכחה שיכולה להיות מובנת גם לתלמידי תיכון.

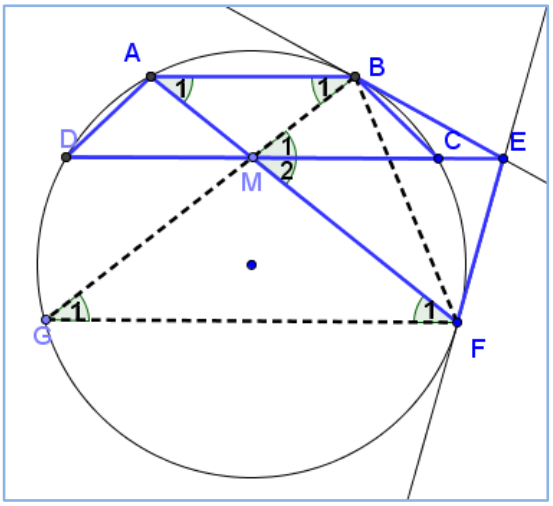
הבעיה

ABCD טרפז חסום במעגל. המשיק למעגל מנקודה B פוגש את המשך DC בנקודה E. הישר המחבר את A עם אמצע DC פוגש את המעגל בנקודה F. צריך להראות כי EF הוא משיק למעגל.



סרט 1

קישור ליישום דינאמי



סרטוט 1

כאמור בתחילה, מצאתי הוכחות לטענה במקרים פרטיים כגון, אם DC קוטר, או אם $ABDC$ מלבן.

להלן מוצגת ההוכחה שמצאנו.

בניית עזר: נחבר את B עם M. המשך BM פוגש את המעגל ב- G, נחבר את G עם F.

$\Delta BMC \cong \Delta AMD$ (צ.ז.צ). ולכן $AM = BM$ (1).

אבל $BM \cdot GM = AM \cdot MF$ ולכן לפי (1), $MF = GM$.

לכן אם ABFG טרפז שווה-שוקיים נחבר את B ל- F.

נקבל: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle A_1 = \sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_2$. השיוויונים נובעים מהעובדה ש: $GF \parallel AB \parallel DC$. אבל: $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle EBF$ (הזוית בין משיק למיתר). לכן: (2) $\sphericalangle EBF = \sphericalangle M_2$.

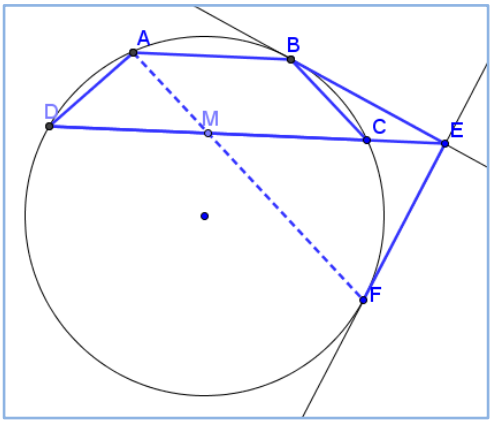
לאחר חישובי זוויות במשולשים נקבל כי את המרובע $BEFM$ אפשר לחסום במעגל. אבל הוכח ש $\sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_2$ ו- BE ו- EF הם מיתרים במעגל החוסם את המרובע $BEFM$, לכן: $BE = EF$ (3), ולכן EF משיק למעגל המקורי.

ניסוחים אלטרנטיביים

לאחר פתרון הבעיה שהוצגה ניתן להרכיב בעיות נוספות המהוות ניסוחים אלטרנטיביים של השאלה המקורית, נציג אותם כאן:

א. נתון $ABCD$ טרפז חסום במעגל. המשיק היוצא מנקודה B פוגש את הצלע CD בנקודה E. EF משיק נוסף למעגל. הוכיחו כי הנקודות A, M (אמצע DC) ו- F נמצאות על ישר אחד.

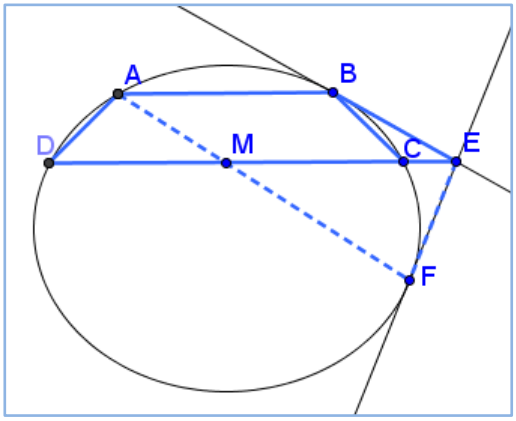
ב. יהיו EB ו- EF משיקים למעגל. ישר כלשהו היוצא מנקודה E חותך את המעגל בנקודות C ו- D. תהי M אמצע CD. FM חותך את המעגל בנקודה A. הוכיחו כי: $AB \parallel DC$.



סרטוט 2

הכללה לאליפסה

יהיה $ABCD$ טרפז שווה-שוקיים החסום באליפסה, כאשר AB ו- CD מקבילים לקוטר הגדול של האליפסה. BE משיק לאליפסה, כאשר E נקודה על המשך הישר DC. M אמצע CD, המשך הישר AM חותך את האליפסה בנקודה F. נשאלת השאלה האם EF משיק לאליפסה?

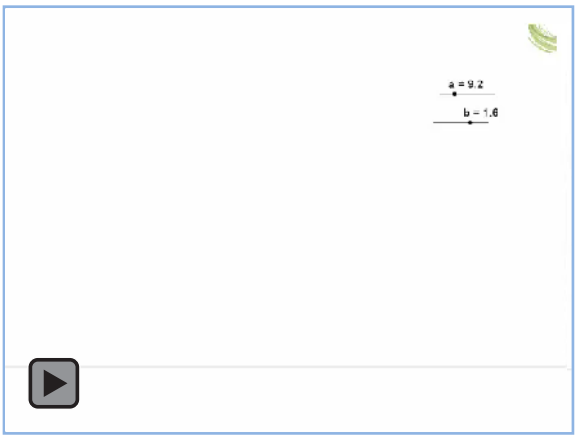


סרטוט 3

ברור שכלי ההוכחה שהיו זמינים לגבי המעגל לא פועלים כשמדובר באליפסה (לדוגמה, משפט הזווית בין משיק למיתר).

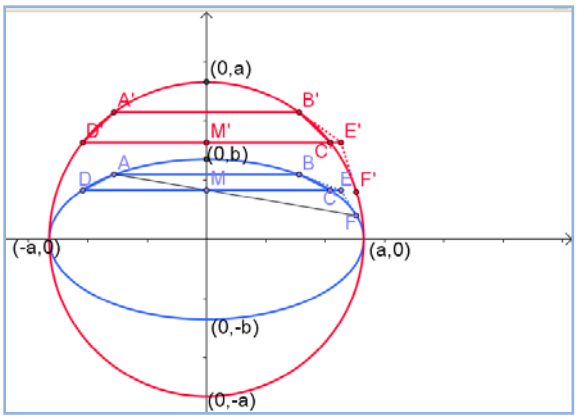
כדי לענות על השאלה האם EF משיק לאליפסה, נפעיל טרנספורמציה ידועה, המעבירה את האליפסה למעגל שקוטרו שווה לקוטר הגדול של האליפסה. אם טרנספורמציה זאת תהפוך את הבעיה שהוצגה לגבי האליפסה לבעיה שנפתרה עבור המעגל, התשובה שהוצגה היא חיובית.

נביט באליפסה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ונפעיל את הטרנספורמציה $f(x,y)=(x,\frac{a}{b}y)$. תחת הטרנספורמציה, האליפסה הנתונה עוברת למעגל $x^2+y^2=a^2$.



סרט 2

קישור ליישום דינאמי



סרטוט 4

בסרטוט 4 סומנו בכחול הנתונים לגבי הטרפז באליפסה. הנקודות במעגל סומנו באדום. A', B', C', D' הן תמונות של A, B, C, D תחת הטרנספורמציה. קל להוכיח שתחת הטרנספורמציה אמצע DC עובר לאמצעי D'C', ישרים משיקים עוברים לישרים משיקים. לכן E עובר ל- E' ו- F עובר ל- F'. אבל הוכח ש- $E'F'$ משיק למעגל, לכן EF משיק לאליפסה.

ברצוני להודות לד"ר אבי סיגלר שהשקיע מזמנו במטרה לחקור את הבעיה שהצגתי בפניו. במאמצים משותפים הצלחנו להגיע לפתרון.

בשארה ג'אסר
מורה למתימטיקה בגמלאות.
מורה בכיר ושותף בצוות שייסד את בית הספר התיכון בתרשיחא.

ד"ר אבי סיגלר
מנהל פדגוגי ומורה למתמטיקה, בבית הספר הטכני של חיל האוויר בחיפה.