משפטי קיום והוכחות קיום בבית הספר התיכון – צורך כמעט קיומי

אריה רוקח נצה מובשוביץ-הדר

מידת החשיפה של תלמידי בית הספר העל-יסודי להוכחות במסגרת לימודי המתמטיקה, היא אחד הנושאים "הלוהטים" בכינוסים ובמאמרים בעיתונות המקצועית של הקהילייה העוסקת בחשיבה עיונית ובמחקר ניסיוני בתחום החינוך המתמטי. זהו גם אחד הנושאים השנויים ביותר במחלוקת בקרב ציבור המורים. יש הטוענים שזהו לב-ליבה של המתמטיקה, ועל-כן הכרחי לחשוף את התלמידים להוכחות ולשיטות הלוגיות הקפדניות שמאחוריהן. לעומתם, יש הטוענים שההוכחות אינן מוסיפות הרבה ליכולת ליישם את העקרונות המתמטיים לפתרון בעיות, שזה בעצם הדבר החשוב ביותר שיש להקנות לתלמידים. לקריאה נוספת, בסוגיית מקומה של ההוכחה והיכולת להוכיח בחינוך מתמטי, הקוראים מוזמנים לגלוש לאתר של ICM119:

http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8

יחד עם זאת יש הסכמה כללית, כמעט גורפת, שהוראת המתמטיקה צריכה להקנות לתלמידים לפחות יכולת הנמקה על-ידי התנסות בביסוס שיטתי של טענות בתחומי המתמטיקה השונים, הנלמדים בבית הספר העל-יסודי. במיוחד מקובל לעסוק בהוכחות ישירות (הנשענות על כלל ההיסק הבסיסי "מודוס פוננס" ועל היפוכו "מודוס טולנדו טולנס"), בהוכחה באינדוקציה שלמה, בהוכחה על דרך השלילה, ולעתים בהפרכה על-ידי דוגמה נגדית.

יש סוג אחד של הוכחות שהתכנית המקובלת נמנעת ממנו כמעט לגמרי – הוכחות קיום.

מקובל לומר שמשפט קיום הוא משפט הטוען שקיים עצם מתמטי מסוים. למשל: קיים פתרון ממשי למשוואה מהסוג:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

בתנאי ש $a \neq 0$ ו- $b^2 - 4ac \geq 0$ כאשר a,b,c ממשיים.

הוכחתו של משפט קיום עשויה להיות **קונסטרוקטיבית**, כלומר – הוכחת הקיום של העצם המתמטי נעשית על-ידי בנייתו בפועל, או הצבעה על עצם כזה (כמו למשל, נוסחת הפתרון של המשוואה הריבועית).

היא עשויה גם להיות **לא קונסטרוקטיבית**, היינו, בסופה של ההוכחה ברור מצד אחד שהעצם קיים, אך לא ידוע כיצד, אם בכלל, ניתן לבנות את העצם המתמטי, או שידוע שאי-אפשר לבנות אותו. (כמו למשל, הקיום של מספר ראשוני גדול מכל מספר ראשוני נתון – כפי שיפורט להלן).

שני הסוגים מעוררים עניין רב בקרב מתמטיקאים אבל, כאמור, בבית הספר התיכון הנם נדירים.

אפילו המשפט היסודי של האריתמטיקה (לכל מספר טבעי קיימת הצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים, והיא יחידה) לא זוכה ל"נוכחות".

אחת הסיבות לכך היא הקושי הקונספטואלי המתלווה לטענות קיום והוכחותיהן, במיוחד במקרה של הוכחות לא קונסטרוקטיביות, מפני שהמחשבה האנושית רגילה לעצמים שאפשר "למשש אותם". קשה להשתכנע בקיומו של עצם (מתמטי), שקיומו הוכח בדרך זו או אחרת, אך אין דרך לבנות אותו, לראות אותו או לחוש אותו באחד מחמשת החושים.

להלן נביא דוגמאות למשפטי קיום שמן הראוי להביאם בפני תלמידי תיכון.

בכל שנה עורכת קהיליית החינוך המתמטי כנס שבו נדונה סוגיה מרכזית מתחום המחקר בחינוך מתמטי. בעקבות כנס זה יוצא לאור ספר המיועד להציג בפני הקהילייה את "המילה האחרונה" בסוגיה הנדונה. בשנת 2009 נערך בטאיפה כנס מס 19 שהתמקד בנושא: Proof and Proving

1. קיום אינסוף מספרים ראשוניים

משפט קיום: עבור כל מספר ראשוני p, יש מספר ראשוני q הגדול ממנו.

הוכחה:

יהי המספר הראשוני הנתון p.

ניצור מכפלה של p בכל המספרים הראשוניים הקטנים ממנו ונוסיף למכפלה 1. מובן מאליו שהסכום q גדול מ-p.

קיימת אחת משתי אפשרויות:

אפשרות א: q ראשוני.

אפשרות ב: q פריק.

אם אפשרות א נכונה אז ברור שמצאנו מספר ראשוני חדש q גדול מ- p, וזה מה שרצינו להוכיח.

אחרת, ל- q יש מחלק ראשוני r. r לא יכול להיות מספר ראשוני קטן מ- p או שווה לו - כי שארית החילוק של q במספרים אלה איננה 0, אלא 1. מכאן, $r > p$. כלומר, מצאנו מספר ראשוני r הגדול מהמספר הראשוני הנתון p. מ.ש.ל.

הוכחה נפלאה זו אינה שייכת לחומר הלימודים הרגיל. מצד שני, אין שום בעיה ללמד אותה, אפילו בחטיבת הביניים.

כפי שנאמר בהוכחה, אם מוסיפים 1 למכפלת הראשוניים מ- 2 עד מספר ראשוני מסוים (כולל), מקבלים מספר חדש שאיננו בהכרח ראשוני. הניסיון מראה שעבור $3, 5, 7$ המספר החדש הוא ראשוני:

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

$$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$$

שאלה מעניינת שאפשר לתת לתלמידים לחקור היא: מהו המספר הראשוני הקטן ביותר שעבורו הסכום הזה איננו ראשוני.

"האומנם? מי מבטיח שקיימים בכלל מצולעים משוכללים? האם אפשר לבנות אותם?"

התשובה היא 13, ואכן:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30{,}031 = 59 \times 509$$

2. מצולעים משוכללים

משפט קיום: עבור כל n, קיים מצולע משוכלל בעל n צלעות.

בכיתה ח' או ט' מתוודעים להגדרת מצולע משוכלל: קו סגור בעל n צלעות שוות וזויות שוות. הגדרה זו נראית כברורה מאליה, עד שאין כנראה תלמיד המעז לשאול: "האומנם? מי מבטיח שקיימים בכלל מצולעים משוכללים? האם אפשר לבנות אותם?"

בחלק מספרי הלימוד מופיע הרעיון שבניית מצולע משוכלל בעל n צלעות שקולה לחלוקת המעגל ל- n קשתות שוות.

אין בנמצא שיטה לחלוקת זוית (ובכלל זה הזווית 360 מעלות) למספר נתון של זוויות שוות. מה נותן אם כך את הביטחון שאכן קיים מצולע משוכלל בן 13 צלעות, למשל?

הרי אם הייתה בנמצא בנייה גאומטרית, בעזרת סרגל ומחוגה, המחלקת את המעגל ל- 13 זוויות שוות, לא הייתה שום בעיה לבנות מצולע משוכלל כנדרש: מסרטטים מעגל. מחלקים את הזווית 360 מעלות ל- 13 חלקים שווים, ומקום חיתוכי הקרניים עם המעגל הם קדקודי המצולע המשוכלל הנדרש.

אבל, כבר הוכח שאין בנמצא בנייה שכזו (הקורא המתעניין מוזמן לעיין בספרו של פרופסור אברהם הלוי פרנקל, מבוא למתמטיקה כרך א עמ' 182-194), וחוזרת השאלה למקומה.

בספרם הקלאסי לגאומטריה של ד"ר קלעי ותוחמן, אחרי הצגת המצולע המשוכלל והוכחת נוסחת הסכום לסכום זוויותיו (עמוד 198), כותבים המחברים:

"הערה: יכולה, כמובן, להתעורר השאלה: כיצד לחלק את המעגל ל- n קשתות שוות? והשאלה במקומה היא ועוד נחזור לדון בה. אך זוהי שאלה של בנייה ואף כי לא תמיד נוכל לבצע בנייה זו בעזרת סרגל ומחוגה, אין בזה משום

פסול להוכחה שהבאנו, המניחה את **האפשרות העיונית** של חלוקת מעגל ל- n קשתות שוות."

ברוב ספרי הלימוד של היום, אין התחבטות כלל בשאלה זו.

אולם שאלה זו אינה תלושה מן המציאות. בהגיעו לעולם הנדסת-המרחב, מגלה התלמיד, כי בניגוד למובטח בהנדסת-המישור, אין גופים משוכללים מכל סדר שהוא: יש רק חמישה כאלה בלבד!

עובדה זו מעצימה את התהייה לגבי קיומם הבטוח של מצולעים משוכללים מכל סדר שהוא.

קלעי ותוחמן אמנם הבטיחו לנו ש "עוד נחזור לדון בזה" אך הבטחה זו אינה מתממשת באותו ספר.

מה היא, אפוא, אותה הוכחה המבטיחה את קיומם של מצולעים משוכללים מכל סדר שהוא?

למעשה, יש שתי דרכים "לראות" שהטענה היא טענת אמת, על-ידי המחשה של תהליך חלוקה של מעגל למספר כלשהו גדול כרצוננו, של קשתות שוות.

נתאר לעצמנו כי המעגל מסורטט על גלגל של אופניים, והוא מרוח בצבע. הגלגל נוסע על הכביש או על משטח אחר ומשאיר עליו פס של צבע. נבצע סיבוב שלם על הכביש, כך שאורך הפס הצבוע על הכביש הוא היקף המעגל. נחלק את הקטע על הכביש ל- 13 קטעים שווים, ונסמן את נקודות החלוקה. כעת נסיע את הגלגל חזרה – מסוף הקטע ועד לראשיתו. באופן זה, נקודות החלוקה שעל הקטע על הכביש הוטבעו על היקף המעגל, וכך חילקנו את המעגל ל- 13 קשתות שוות. מכאן, כדי לבנות את המצולע המשוכלל, נחוץ רק סרגל.

זוהי כמובן הדגמה ולא הוכחה. מצד שני, זהו הסבר קונסטרוקטיבי שעשוי לחזק את התחושה האינטואיטיבית שהקיום אכן ניתן להוכחה.

פעולה אחרת שתלמידים יכולים לבצע לחיזוק האינטואיציה הזאת היא הקפת המעגל בחוט. אחר-כך יש ליישר את החוט, ולחלק אותו ל- n חלקים (על-ידי שימוש במשפט תאלס), ושוב לפרוס את החוט מסביב למעגל. הצעה לפעילות יכולה להיות - לבצע זאת על חוף הים על-ידי שימוש בחוטים וצדפים. יש להניח כי שיטה זו אפשרה למצרים הקדמונים לבנות את מבני העמודים המתומנים הענקיים שעד היום ניצבים על תלם.

כאמור, אין אלה הוכחות במובן הפורמאלי של המילה, אבל העיסוק בשאלת הקיום כשלעצמו הוא בעל חשיבות.



סרט 1

3. אורך המעגל

משפט קיום: יש אורך למעגל.

האם למעגל יש אורך? לכאורה, השאלה מיותרת, ולא היא.

במאמרו "מה אורך קו החוף של אנגליה?" (Mandelbrot, 1983), מראה מנדלברוט כי יש עקומות שאין להן אורך. על כן, תחילה יש לנסח משפט קיום, הטוען כי למעגל יש אכן אורך. זה משפט קיום המייחס תכונות מסוימות לעצם שקיומו ידוע.

גם כאן ניתן לתת אותו הסבר (גלגל האופניים) מהפסקה הקודמת. הסבר זה קרוב ביותר להוכחה לא קונסטרוקטיבית.

גם אם לא מביאים הוכחה מלאה, יש לדעתנו חשיבות לעצם העלאת השאלה, בניסוח משפט הקיום, ולמתן ההסבר דמוי ההוכחה. חשיבות זאת נובעת מכמה סיבות. ראשית, לא מטאטאים בעיות מתחת לשטיח, ומתייחסים אליהם בכבוד רב, גם אם אי-אפשר לתת הוכחה מלאה ופתרון לבעיה. שנית, זוהי הזדמנות לדון בעקומות שאין להן אורך, דוגמת אלו המתוארות על-ידי מנדלברוט.

טוביאס דנציג

Tobias Dantzig, 1884-1956,

מתמטיקאי שנולד בלטביה, התגורר בגרמניה ובארה"ב.

מספריו המפורסמים:

"The Language of Science" (A Critical Survey Written for the Cultured non Mathematician) (1930)

and "Aspects of Science"

(New York, Macmillan, 1937).

4. חילוק במערכת ספירה על בסיס ראשוני

בסיסי ספירה שונים מ- *10* הוכנסו לזמן קצר לתכניות הלימודים (בשנות ה- 80 של המאה העשרים), ויצאו ממנה די מהר. יחד עמם נשמט מהתכנית גם החשבון המודולרי. היה בכך רווח וגם הפסד כפי שנראה להלן.



הרוזן ז'וזף-לואי לגרנז',
Joseph Lagrange
1736-1813,
מתמטיקאי ופיסיקאי צרפתי יליד איטליה

בספרו (ארבל, 2009) מצטט פרופסור בנו ארבל את המתמטיקאי טוביאס דנציג, שכינה את בחירת הבסיס עשר כבסיס הספירה בתור "תאונה פיזיולוגית".

לעומתו המתמטיקאי יוסף לגרנז', מציע כבסיס ספירה אוניברסאלי את *11* בהיותו מספר ראשוני. (שם עמ' 17). בנו ארבל אינו מפרט את הסיבה לקביעה זו, אך ייתכן שהיא נשענת על הטיעון הבא:

אילו המערכת הייתה על בסיס מספר ראשוני, היה ניתן לבצע חילוק (בלי שארית), באופן כזה שספרות התוצאה היו מתקבלות מהיחידות אל העשרות והמאות וכך הלאה, ולא להיפך כפי שקורה בשיטת החילוק הארוך. נדגים זאת במערכת ספירה בבסיס *3* (שבה משמשות רק הספרות *0,1,2*).

לוח הכפל במערכת זו נראה כך:

	0	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1 (ושארית 1)

טבלה 1

אם נתעלם מהספרה *0*, לוח הכפל יראה כך:

	1	**2**
1	1	2
2	2	1 (ושארית 1)

טבלה 2

תרגיל החילוק *1022:12* יתבצע על-ידי חיפוש תשובה לבעיית הכפל:

```
  AB
  12
---------
  CDE
 ZXY
----------
 1022
```

מיידית נובע כי $E=2$, ולפי טבלת הכפל, פתרון המשוואה $B\cdot 2=E=2$, הוא $B=1$.

נציב ונקבל:

```
  A1
  12
----------
  CD2
 Z X1
----------
 1022
```

$$D=2-1=1$$

```
  A1
  12
----------
  C12
 Z X1
----------
 1022
```

ופתרון המשוואה $2A=1$ נותן $A=2$.

תוצאת החילוק היא אפוא: *21*.

בדרך זו ניתן לפתור כל תרגיל חילוק במערכת שהיא על בסיס ספירה ראשוני, כך שהספרות מתקבלות מן ספרת היחידות ומעלה.

כעת נוכל לנסח **משפט קיום** המתאים למערכת זאת.

משפט: תהיה נתונה מערכת ספירה על בסיס ראשוני N. יהיו X,Y,Z מספרים במערכת זאת,

$$1\le Z\le N-1$$
$$1\le X\le N-1$$

X, Z ידועים, ו- Y נעלם. אם נתונה המשוואה הבאה:

$$Z = (X \cdot Y) \bmod (N)$$

אזי יש פתרון יחיד Y למשוואה זאת: $1 \le Y \le N-1$.

דרך זו מאפשרת ביצוע חילוק (בתנאי שאין שארית) כך שספרות התוצאה מתקבלות מספרת היחידות ומעלה, ממש כמו בתרגיל כפל, בהתאם לדוגמה למעלה.

הוכחה

למה 1: בשורה כולשהי בטבלת הכפל, אין מספר שמופיע פעמיים.

הוכחה על דרך השלילה: נניח כי

$$X \cdot Z \pmod N = X \cdot Y \pmod N$$

מכאן נובע $X \cdot (Y - Z) \pmod N = 0$

מכאן נובע ש ל- X או ל- $Y - Z$ יש גורמים משותפים עם N. זה לא ייתכן כי N הוא ראשוני, ועל כן אין ל- X גורם משותף איתו.

$Y - Z$ גדול מ- 0 וקטן מ- N, על כן גם לו אין גורם משותף עם N. בזאת הוכחה למה 1.

למה 2: בטבלת הכפל מופיעים בכל שורה כל המספרים מ- 1 ועד $N-1$.

הוכחה: בכל שורה יש $N-1$ איברים. מכיוון שאף מספר אינו מופיע פעמיים, על-פי למה 1, ומכיוון שיש $N-1$ אפשרויות למספרים אלו, הרי שכל המספרים מופיעים.

כעת נוכל לסכם את שיטת פתרון המשוואה $Z = (X \cdot Y) \bmod (N)$

כאשר Y נעלם.

נחפש בטבלת הכפל את המספר Z, בשורה X. על-פי למה 2, הוא חייב להימצא בשורה זו, ורק פעם אחת.

העמודה Y, בה הוא נמצא, היא הפתרון המבוקש של משוואה זו. מ.ש.ל.

ובזאת הוכח משפט הקיום שלעיל.

5. מספרי פיבונצ'י

סדרות מתמטיות הן נושא שתכנית הלימודים בכל הרמות נוגעת בו. סדרת פיבונצ'י *(0,1,1,2,3,5,8,13,21....)* נחשבת ל"מותרות" בתכנית זו, וחבל. סדרה זו מוגדרת על-ידי הכללים הבאים:

האיברים הראשונים בסדרה הם *0,1*.

כל איבר אחר הוא סכום שני קודמיו.

כפי שנראה להלן, התייחסות הולמת אליהם, מזמנת משפט קיום יפהפה.

(ראה גם: רוקח, 1997.) לדוגמה, נסדר את מספרי פיבונצ'י בעמודות משמאל לימין בטבלה בת שלוש שורות באופן הבא (ראה טבלה 3):

0	*2*	*8*	*34*	*144*	*610*
1	*3*	*13*	*55*	*233*	*987*
1	*5*	*21*	*89*	*377*	*1597*

טבלה 3: מספרי פיבונאצ'י

ניתן לראות כי מתקיים היחס הבא:

כל מספר, בעמודה השלישית ומעלה, הוא מכפלה ב- *4* של המספר שנמצא באותה שורה ובעמודה לשמאלו, בתוספת האיבר שנמצא באותה שורה, שתי עמודות לשמאלו. למשל:

8=4 x 2+0

34=4 x 8+2

13=4 x 3+1

21=4 x 5+1

וכך הלאה.

נסתכל כעת בטבלה דומה בת 2 שורות בלבד (ראה טבלה 4):

0	1	3	8	21	55
1	2	5	13	34	89

טבלה 4

כאן היחס הוא שונה: כל מספר הוא מכפלה ב- 3 של המספר שנמצא באותה שורה משמאלו, בהפחתת האיבר שנמצא באותה שורה, שתי עמודות לשמאלו.

דוגמאות:

$$3=3\ x\ 1-0$$

$$8=3\ x\ 3-1$$

$$5=3\ x\ 2-1$$

$$13=3\ x\ 5-2$$

תופעה זו נכונה לטבלאות במספר שורות כלשהו, ותמיד הגורם המכפיל הוא אחד ממספרי לוקאס :...1,3,4,7,11,18.

והנה, תובנה זו התגלתה בזכות התבוננות בטבלה 3 שלמעלה, בת שלוש השורות. מכיוון שהשורה השלישית תלויה ליניארית בשתי השורות שמעליה, (כלומר, שהיא סכום של מכפלות 2 השורות שמעליה, ובאופן ספציפי היא סכום מדויק שלהן) מכאן נובע, על-פי משפט באלגברה ליניארית, שהעמודה השלישית תלויה ליניארית בשתי העמודות שלפניה. נותר רק למצוא את המקדמים, ולהוכיח בהמשך את החוקיות הכללית, לגבי טבלה בת מספר שורות כללי כלשהו.

משפט קיום: קיימים מקדמים a,b כך שהכפלת עמודה j ב- a והוספת התוצאה להכפלת עמודה $j+1$ ב- b, יתנו את עמודה $j+2$ עבור כל j, ועבור כל מטריצה של מספרי פיבונצ'י.

נותר רק למצוא את a ו- b.

נוכיח את המשפט הבא – המקשר בין העמודות של המטריצה:

$$F_{n+k}=(-1)^{k+1}F_{n-k}+F_nL_k$$

כאשר $n\geq k$.

(F_n הם מספרי פיבונצ'י, בעוד L_k הם מספרי לוקאס.)

k הוא מספר השורות במטריצה. נוסחה זו מקשרת בין 3 איברים הנמצאים באותה שורה, בשלוש עמודות סמוכות.

הוכחה באינדוקציה

ההוכחה היא באינדוקציה על k.

בדיקה עבור $k=1$: נציב בנוסחת המשפט $k=1$:

$$(-1)^2F_{n-1}+F_nL_1=F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$$

בזאת הוכחה הטענה עבור k=1 ו- n כלשהו.

נבדוק גם עבור $k=2$ ו- n כלשהו.

$$(-1)^3F_{n-2}+F_nL_2=$$
$$(-1)F_{n-2}+3F_n=$$
$$(-1)F_{n-2}+F_n+F_n+F_n=$$
$$F_{n-1}+F_n+F_n=$$
$$F_{n+1}+F_n=F_{n+2}$$

מ.ש.ל.

כעת נניח נכונות עבור $k,k-1$ ו- n כלשהו, ונוכיח נכונות עבור $k+1$ ו- n כלשהו.

על-פי ההגדרה הבסיסית:

$$F_{n+(k+1)}=F_{n+k}+F_{n+(k-1)}=$$

על פי הנחת האינדוקציה:

$$=((-1)^{k+1}F_{n-k}+F_nL_k)+((-1)^kF_{n+1-k}+F_nL_{k-1})=$$
$$=(-1)^{k+1}F_{n-k}+(-1)^kF_{n-k+1}+F_nL_{k-1}+F_nL_k=$$
$$=(-1)^{k+2}(-F_{n-k}+F_{n-k+1})+F_nL_{k+1}=$$
$$=(-1)^{k+2}F_{n-k-1}+F_nL_{k+1}=$$
$$=(-1)^{k+2}F_{n-(k+1)}+F_nL_{k+1}$$

מ.ש.ל.

סדרת מספרי לוקאס:

האיבר הראשון הוא 1, האיבר השני הוא 3. כל איבר בסדרה הוא סכום שני קודמיו.

הסדרה קרויה על שמו של המתמטיקאי הצרפתי אדוארד לוקאס



1842-1891

6. הספרות האחרונות של מספרי פיבונצ'י

משפט קיום: קיים מספר פיבונצ'י המסתיים בספרות *99*.

הוכחה למשפט זה מעובדת כאן לפי מיטב (2008).

הוכחה

תחילה "נלך אחורה" ונחשב את מספר פיבונצ'י הנמצא במקום *-1*:

$$1-0=1$$

כמו כן נחשב את מספר פיבונצ'י הנמצא במקום *-2*:

$$0-1=-1$$

נבנה זוגות סדורים של איברי פיבונצ'י עוקבים באופן הבא:

(-1,1) (1,0) (0,1) (1,1) (1,2) (2,3) (3,5) (5,8) (8,13)...

מספר שאריות החלוקה של מספרי פיבונצ'י ב- *100* הוא *100*. לכן מספר הזוגות של שאריות החלוקה ב- *100* הוא *100·100=10000*.

נסתכל ב- 10001 זוגות שאריות החלוקה הראשונים. קיימים בתוכם שני זוגות בעלי אותן שאריות חלוקה ב- *10001*.

טיעון זה מתבסס על עיקרון "שובך היונים של דיריכלה":

אם יש *100* תאים, ויש *101* יונים, הרי יש תא שבו יש יותר מיונה אחת. (זהו משפט קיום יפהפה בפני עצמו ומהווה בסיס למשפטי קיום רבים ומפתיעים).

נניח ששני הזוגות הללו הם:

$$(F_n\ ,\ F_{n+1})$$

$$(F_{n+k}\ ,\ F_{n+k+1})$$

נסמן:

$$F_n \bmod 100 = F_{n+k} \bmod 100 = A$$

$$F_{n+1} \bmod 100 = F_{n+k+1} \bmod\ 100 = B$$

על-פי חוקי החיסור המודולרי:

$$(F_{n+1} - F_n) \bmod 100 =$$
$$= (F_{n+k+1} - F_{n+k}) \bmod 100 = B - A$$

אבל:

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

$$F_{n+k+1} - F_{n+k} = F_{n+k-1}$$

כלומר:

$$F_{n-1} \bmod 100 = F_{n+k-1} \bmod 100$$

ובאותו אופן:

$$F_{n-2} \bmod 100 = F_{n+k-2} \bmod 100$$

.....

$$F_{-2} \bmod 100 = F_{k-2} \bmod 100$$

$$F_{-2} \bmod 100 = -1 \bmod 100 = -1 = F_{k-2} \bmod 100$$

ומכאן ש- F_{k-2} מסתיים בספרות *99*. מ.ש.ל.

באותו אופן ניתן להוכיח כי יש מספר פיבונצ'י המסתיים במספר גדול כרצוננו של תשיעיות.

סיכום

משפטי קיום והוכחות להם, מוזנחים כיום בתכנית הלימודים, ואין הצדקה לכך.

יש חשיבות מתמטית, חינוכית וערכית, להפניית תשומת הלב כלפי משפטי קיום, גם אם ניתנת הוכחה חלקית, או הסבר כלשהו, או שאין ניתנת כלל הוכחה.

במאמר זה ניסינו לצקת את היסודות לכך.

היריעה רחבה מאוד והבאנו רק "על קצה המזלג". אפשר להעלות גם משפטי אי-קיום (כגון, אי-קיום של נוסחה לפתרון של משוואה פולינומיאלית ממעלה חמישית ומעלה).

ישנם גם מקרים משולבים של משפט קיום ומשפט אי-קיום, כמו המשפט הבא:

ניתן לרצף את המישור על-ידי מצולעים משוכללים בני *3,4,6* צלעות (משפט קיום), אך אי-אפשר לרצף אותו על-ידי מצולעים משוכללים מכל סדר אחר. טבלה 5 (מתוך מובשוביץ-הדר 1997) מבהירה את הסיבה לכך:

"כדי שייווצר ריצוף פשוט במצולעים, צריכים שלושה מצולעים או יותר להיפגש בכל קדקוד של כל מצולע, כך שסביב הקדקוד המשותף ייווצר סכום זוויות של של 360° בדיוק. לא פחות ולא יותר."

מספר הצלעות במצולע המשוכלל	מידת כל זווית במצולע	מספר המצולעים בכל קודקוד	סכום הזוויות סביב כל קודקוד	הייתכן ריצוף?
3	60°	3	180°	לא
3	60°	4	240°	לא
3	60°	5	300°	לא
3	60°	6	360°	כן
4	90°	3	270°	לא
4	90°	4	360°	כן
5	108°	3	324°	לא
5	108°	4	432°	לא
6	120°	3	360°	כן
7 ומעלה	מעל 120°	3	מעל 360°	לא

טבלה 5

משפטי קיום עשויים להועיל גם במשחקים. כך, למשל, ישנו משפט קיום מעניין לגבי משחק המשושים הידוע גם בשמו הלועזי הקס. (ר' למשל, מובשוביץ-הדר 1994.) במשחק המשושים יש לוח מרוצף במשושים. שני שחקנים משתתפים במשחק. כל שחקן, בתורו, מסמן את אחד המשושים. המטרה היא לסמן שביל רצוף של משושים משפה אחת אל השפה הנגדית. משפט קיום קובע כי לשחקן המתחיל ראשון יש אסטרטגיית ניצחון. זהו משפט קיום לא קונסטרוקטיבי.

בדומה לכך, יש גם משפט קיום לגבי משחק הסודוקו. המשפט טוען כי בתנאים מסוימים יש פתרון יחיד לחידת סודוקו נתונה (Herzberg, Agnes & Murty, Ram, 2007).

כאמור, לדעתנו רצוי, ואף ניתן, להכניס לבית הספר התיכון את הרעיונות הכרוכים בהוכחות קיום – קונסטרוקטיביים ולא קונסטרוקטיביים. יש מקום לשלב את שאלות הקיום (והאי-קיום) בחשיפת התלמידים לאורח החשיבה המתמטי ובמקביל לכך, יש גם מקום להתייחסות מחקרית לנושא זה במסגרת החינוך המתמטי.

מקורות

ארבל, ב' (2009). *מתמטיקאים דגולים ואירועים בתולדות המתמטיקה*. הוצאת מופת.

מובשוביץ-הדר, נ' (1994). משחק המשושים – הקס, נצה. *על"ה 15*, 72-76.

מובשוביץ-הדר, נ' (1997). חכמת הדבורים, *על"ה 20*, 261-276..

מיטב, א' (2008). *מספרים מכושפים*. הוצאת שורש.

קלעי ותוחמן, (1956). *הנדסת המישור, חלק א*. הוצאת עבר ירושלים.

רוקח, א' (1997). יחסי אהבה ושנאה בין מספרי לוקאס למספרי פיבונצ'י, *על"ה 21*, 60-62.

Herzberg, M., Agnes and Murty, M. Ram (2007). Sudoku Squares and Chromatic Polynomials. *Notices of the AMS*, June/July issue.

Mandelbrot, B. (1983). How Long Is the Coast of Britain? In: *The Fractal Geometry of Nature* . W.H. Freeman and Company. pp. 25-33.

אריה רוקח

מהנדס תוכנה.

מאמריו בנושאים שונים במתמטיקה פורסמו בעל"ה ובאכסניות אחרות בארץ ובעולם.

פרופ' נצה מובשוביץ-הדר

הטכניון, המחלקה להוראת המדעים.

מנהלת את "קשר-חם" - המרכז לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי בישראל. בעבר ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע, תכנון וטכנולוגיה.