משפחת הפונקציות $f(x)=x^a e^{-ax}$,$a>0$
מארחת הזדמנות לחקירה משמעותית

חמוטל דוד

במסגרת תכנית הלימודים של 5 יח"ל נדרשים התלמידים לבצע חקירות אנליטיות לפונקציות, לעתים גם עם פרמטרים. בין הפונקציות הנלמדות כלולות גם פונקציות מעריכיות. להלן חקירה של משפחת פונקציות אשר כל חברה בה היא מכפלה של פונקציית חזקה (או שורש) בפונקציה מעריכית. במהלך החקירה, חלק מהתכונות מתגלות כמשותפות לכל הפונקציות במשפחה, וחלקן דורש הפרדה למקרים – תת-קבוצות במשפחה – לפי תחומים של ערכי הפרמטר ולפי תכונות נוספות שלו. החקירה משלבת שיקולים אנליטיים (של חשבון דיפרנציאלי), שיקולים אלגבריים מתחום החקירה של פונקציות ריבועיות, ודיון מעמיק בהגדרת החזקה.

המשפחה הנחקרת: $f(x)=x^a e^{-ax}\ ,\ a>0$, a **מוצג כשבר מצומצם** במקרה הצורך.

תחום ההגדרה של הפונקציות במשפחה הוא כל ציר המספרים, או הקרן הימנית של ציר ה- x בלבד (כולל אפס).

כדי להחליט האם הפונקציה מוגדרת בחלק השלילי של ציר ה- x יש לבחון את ההגדרה של x^a, כלומר, את הגדרת פעולת החזקה עבור מעריך שאינו בהכרח טבעי. להלן ההגדרות:

x^a עבור a טבעי גדול מ-1 מוגדר כך:

$$x^a=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{\text{פעמים}}$$

$$x^1=x$$

עבור a רציונאלי, מתוך ההגדרה של : $x^{\left(\frac{1}{q}\right)}=\sqrt[q]{x}$ $(q=2,3,4\ldots)$

מגיעים לשוויון:

$$x^{\left(\frac{p}{q}\right)}=\sqrt[q]{x^p}=\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

מתוך הנ"ל ברור כי החזקה $x^{\left(\frac{p}{q}\right)}$ מוגדרת לכל x רק כאשר q אי-זוגי, ומוגדרת רק ל- $x\geq 0$ כאשר q זוגי.

הערה: החקירה המתוארת במאמר תתקיים עבור $a,p,q>0$

וכיצד מוגדרת חזקה אי-רציונאלית?

ההגדרה מתבססת על דרישה של חד-ערכיות. כיוון שהמספרים הממשיים צפופים, הרי שלכל a אי-רציונאלי ניתן להתקרב באמצעות סדרות של מספרים רציונאליים.

נניח כי הסדרה $\left(\alpha_n\right)_1^\infty$ היא סדרת רציונאליים המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=a$$

ההגדרה של הביטוי x^a היא באמצעות תכונת הרציפות:

$$x^a=x^{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n}$$

מכאן ברור, שכאשר a אי-רציונאלי חיובי, הרי שקיים הגבול המגדיר את x^a, אולם אם a אי-רציונאלי שלילי, הרי שלסדרה: $\left(x^{\alpha_n}\right)$ לא בהכרח קיים גבול, או לחילופין קיימים גבולות שונים עבור סדרות שונות. למשל: ניתן לבנות סדרת רציונאליים עם מכנים זוגיים בלבד, כך שהערך של x^a כלל אינו מוגדר בעזרתה; ניתן לבנות סדרת אי-רציונאליים עם מכנים אי-זוגיים, כך שיתקבל גבול שלילי.

לאור הגדרות אלו נסיק כי כאשר a אי-רציונאלי תחום ההגדרה של הפונקציות מצטמצם לקרן: $\left[0,\infty\right)$. כאשר a רציונאלי: אם $a=\frac{p}{q}$ עם q אי-זוגי, אזי התחום הוא: $\left(-\infty,\infty\right)$, ואם q זוגי אזי התחום הוא: $\left[0,\infty\right)$.

סוגיה נוספת שעלינו ללבן לפני תחילת החקירה, נוגעת ליחידות ההצגה של מספרים רציונאליים כמנה של שני שלמים. אם נפעיל את הגדרת החזקה למעריך שבור ללא צמצום, ייתכן ונגיע לשתי תוצאות שונות עבור ביטויים שווי ערך, שהרי:

$$(-8)^{1/3}=\sqrt[3]{-8}=(-2)$$

אולם:

$$(-8)^{2/6}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$$

לכן, לאורך כל החקירה שלהלן, כאשר נתייחס למעריך רציונאלי נתייחס אליו בהצגתו המצומצמת.

נתחיל באיסוף התכונות של הפונקציות במשפחה:

נקודות חיתוך עם הצירים:

נפתור את המשוואה: $x^a e^{-ax}=0$. הפונקציה המעריכית e^{-ax} לא מתאפסת. פונקציית החזקה x^a מתאפסת ב- $x=0$. לכן הגרפים של כל הפונקציות במשפחה עוברים דרך ראשית הצירים.

נבדוק קיום **אסימפטוטה אופקית**: לכל $a>0$ נרצה לחשב את ערך הגבול: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{-ax}$. זהו גבול מהצורה:

"אינסוף כפול אפס", אשר ניתן להציגו כ"אינסוף חלקי אינסוף", כך שהפונקציות המעורבות במהלך מאפשרות את חיפוש הגבול על-פי כלל לופיטל:

מתקיים:

$$\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{ae^{ax}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{a-1}}{e^{ax}}=\ldots=0$$

בהתאם לערך של a ניתן לראות שאחרי מספר חזרות על גזירה של מונה ומכנה בהתאם לכלל לופיטל, נגיע למצב בו יתקבל שהמונה מתאפס והמכנה לא מתאפס, לכן ערך הגבול הוא אפס.

כלומר: עבור כל אחת מהפונקציות במשפחה מהווה הקרן החיובית של ציר ה- x אסימפטוטה אופקית.

כדי לחקור את **תחומי העלייה והירידה** ואת **נקודות הקיצון** של הפונקציות במשפחה, נגזור:

$$f'(x)=ax^{a-1}e^{-ax}-ae^{-ax}x^a=ax^{a-1}e^{-ax}(1-x)$$

הנגזרת מתאפסת ב- $x=1$ לכל ערך של $a>0$. בנקודה זו הנגזרת מחליפה סימן מחיובי לשלילי, ולפונקציה יש נקודת מקסימום. ההתנהגות של הפונקציה בראשית הצירים ומשמאלה מושפעת מהערך של a.

נפריד את החקירה למקרים:

- $a=1$ (1)
- $a>1$ טבעי: (2) a זוגי.
  (3) a אי-זוגי.
- $a>1$ רציונלי: $a=\frac{p}{q}$: (4) q זוגי.
  (5) q אי-זוגי, p זוגי.
  (6) q אי-זוגי, p אי-זוגי.
- $a>1$ (7) אי-רציונאלי.
- $0<a<1$: $a=\frac{p}{q}$, (8) q זוגי.
  (9) q אי-זוגי, p זוגי.
  (10) q אי-זוגי, p אי-זוגי.
- $0<a<1$ (11) אי-רציונאלי.

מקרה (1)

$a=1$.

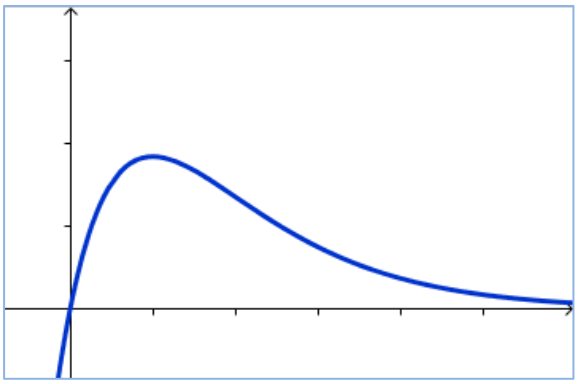
הפונקציה: $f(x)=xe^{-x}$

נגזרתה: $f'(x)=e^{-x}(1-x)$

הנגזרת מתאפסת רק ב- $x=1$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בראשית הצירים, כמו שהפונקציה $f(x)=x$ חותכת אותו: עם שיפוע חיובי וללא פיתול בנקודת החיתוך. יש לפונקציה נקודת פיתול מימין לנקודת המקסימום שלה, היות וציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית שלה.

ניתן לקבל תימוכין לטענה זו, כמובן, גם מהנגזרת השנייה. נבצע חקירה כללית כזו בהמשך. (ראו גרף 1)



גרף 1

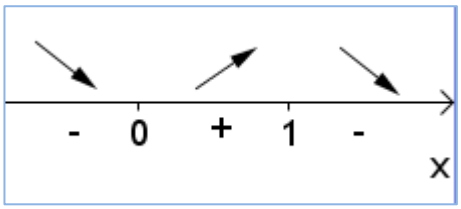
מקרה (2)

$a>1$ טבעי, זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^a e^{-ax}$

נגזרתה: $f'(x)=ax^{a-1}e^{-ax}(1-x)$

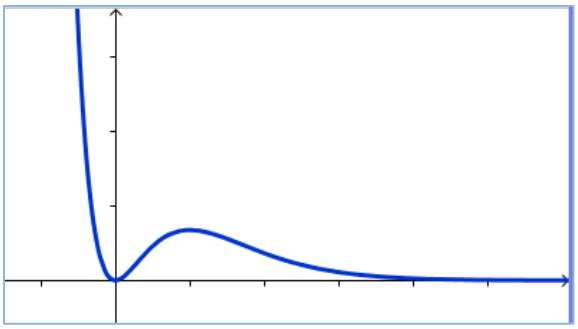
הנגזרת מתאפסת ב-$x=1$ ו-$x=0$. כיוון ש-a זוגי, $a-1$ אי-זוגי, ולכן סימניה של הנגזרת מתחלפים בכל אחת מנקודות האפס שלה. תחומי העלייה והירידה נקבעים כדלקמן:



איור 1

בראשית הצירים הפונקציות הללו משיקות לציר ה-x בדיוק כפי שפונקציות המונומים הזוגיים: $y=x^{2n}$, n טבעי, משיקות לו.

הגרפים של משפחת הפונקציות נראים כך (ראו גרף 2):



גרף 2

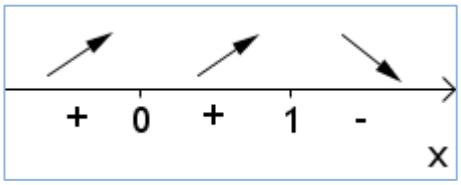
מקרה (3)

$a>1$ טבעי, אי-זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^a e^{-ax}$

נגזרתה: $f'(x)=ax^{a-1}e^{-ax}(1-x)$

כמו במקרה (2) הנגזרת מתאפסת ב-$x=1$ ו-$x=0$. אך כיוון ש-a אי-זוגי, $a-1$ זוגי, ולכן הנגזרת לא משנה את סימנה ב-$x=0$. תחומי העלייה והירידה נקבעים כדלקמן:

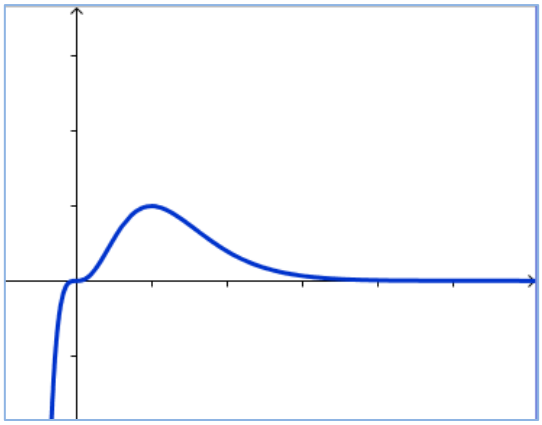


איור 2

בראשית הצירים הפונקציות הללו חותכות את ציר ה-x בדיוק כפי שפונקציות המונומים האי-זוגיים: $y=x^{2n+1}$, n טבעי, חותכות אותו: עם פיתול.

בחקירת הנגזרת השנייה, בהמשך, נצפה לגלות כי לפונקציות אלו יש שלוש נקודות פיתול: האחת מימין ל-$x=1$, האחת בראשית הצירים, והשלישית ביניהן.

הגרפים המתקבלים (ראו גרף 3):



גרף 3

מקרה (4)

$a>1$ רציונלי. $a=\frac{p}{q}$, q זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^{\frac{p}{q}}e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}$,

למשל: $f(x)=x^{2.5}e^{-2.5x}=x^{\frac{5}{2}}e^{-\left(\frac{5}{2}\right)x}$

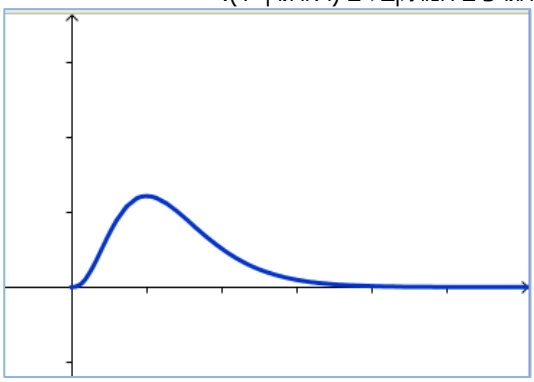
המכנה הזוגי מחייב את צמצום תחום ההגדרה לקרן החיובית של ציר ה-x ו-0 בלבד.

הנגזרת היא: $f'(x)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$

שוב רואים כי הנגזרת מתאפסת ומחליפה סימן ב-$x=1$. בראשית הצירים יש נגזרת חד-צדדית שערכה אפס, כלומר, צורת הגרף בחצי המישור הימני דומה מאוד לזו שהתקבלה במקרה (3).

בחקירת הנגזרת השנייה, בהמשך, נצפה לגלות כי לפונקציות אלו יש שתי נקודות פיתול: האחת מימין ל-$x=1$, והשנייה בין ראשית הצירים ל-$x=1$.

הגרפים המתקבלים (ראו גרף 4):



גרף 4

מקרה (5)

$a>1$ רציונלי: $a=\frac{p}{q}$, q אי-זוגי, p זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^{\frac{p}{q}}e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}$

למשל: $f(x)=x^{\frac{12}{5}}e^{-\left(\frac{12}{5}\right)x}$

המכנה האי-זוגי מאפשר את קיום הפונקציה בכל ציר המספרים.

הנגזרת היא: $f'(x)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$

כרגיל הנגזרת מתאפסת ומחליפה סימן ב- $x=1$. ערך הנגזרת בראשית הצירים הוא אפס. כדי לברר האם יש חיתוך (עם פיתול) או השקה לציר ה- x שם, נבחן את הגורם המשפיע על כך בנגזרת:

$$x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}=x^{\left(\frac{p-q}{q}\right)}$$

המונה מתקבל אי זוגי (כהפרש של מספר אי זוגי וזוגי) וכך גם המכנה.

האי-זוגיות של המונה של מעריך החזקה גורמת להחלפת הסימן של הנגזרת סביב $x=0$, כך שמתקבל גרף דומה מאוד לזה שהתקבל במקרה (2).

בחקירת הנגזרת השנייה, בהמשך, נצפה לגלות כי לפונקציות אלו יש שתי נקודות פיתול: האחת מימין ל- $x=1$, האחת בין ראשית הצירים ל- $x=1$.

מקרה (6)

$a>1$ רציונלי: $a=\frac{p}{q}$, q אי-זוגי, p אי-זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^{\frac{p}{q}}e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}$,

למשל: $f(x)=x^{\frac{5}{3}}e^{-\left(\frac{5}{3}\right)x}$

המכנה האי-זוגי מאפשר את קיום הפונקציה בכל ציר המספרים.

הנגזרת היא: $f'(x)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$

כרגיל הנגזרת מתאפסת ומחליפה סימן ב- $x=1$. ערך הנגזרת בראשית הצירים הוא אפס. כדי לברר האם יש חיתוך (עם פיתול) או השקה לציר ה- x שם, נבחן שוב רק את הגורם המשפיע על כך בנגזרת:

$$x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}=x^{\left(\frac{p-q}{q}\right)},$$

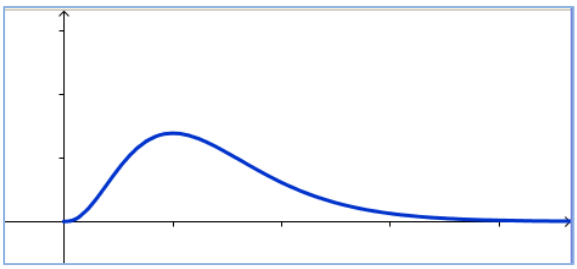
הזוגיות של המונה (הפרש של שני מספרים אי זוגיים) של מעריך החזקה גורמת לשמירה על הסימן של הנגזרת משני צדי הנקודה $x=0$ על ציר ה- x, כך שמתקבל גרף דומה מאוד לזה שהתקבל במקרה (3).

בחקירת הנגזרת השנייה, בהמשך, נצפה לגלות כי לפונקציות אלו יש שלוש נקודות פיתול: האחת מימין ל- $x=1$, האחת בין ראשית הצירים ל- $x=1$ והאחת בראשית הצירים.

מקרה (7)

$a>1$, אי-רציונאלי.

במקרה זה הפונקציות מוגדרות רק בקרן הימנית של ציר ה- x, כולל 0, ובקרן זו התנהגות הפונקציות דומה להתנהגות של הפונקציות במקרים (2)-(6). הגרפים המתקבלים דומים לאלו שבמקרה (4) (ראו גרף 5):



גרף 5 (מתאר את מקרה 7)

מקרה (8)

$0<a<1$, $a=\frac{p}{q}$, $p<q$, q זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^{\frac{p}{q}}e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}$,

למשל: $f(x)=x^{0.5}e^{-0.5x}=x^{\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)x}$

המכנה הזוגי מחייב את צמצום תחום ההגדרה ל- $x\geq 0$.

הנגזרת היא: $f'(x)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$

שוב רואים כי הנגזרת מתאפסת ומחליפה סימן ב- $x=1$.

בראשית הצירים הנגזרת לא מוגדרת. מימין לאפס שואף ערכה ל- $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)=$$

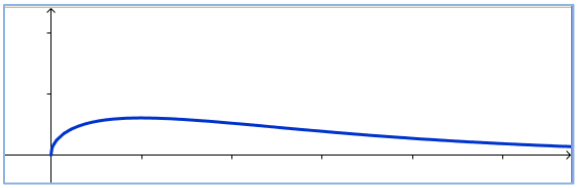
$$\left(\frac{p}{q}\right)\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)}{x^{\left(\frac{q-p}{q}\right)}}=+\infty$$

הסבר לחישוב הגבול:

המונה של הביטוי: $e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$ מוגדר באפס, וערכו שם שווה בדיוק ל- 1. כיוון ש- $p<q$ הרי שמעריך החזקה: $\left(\frac{p}{q}\right)-1$ שלילי, והחזקה שבמכנה בעלת מעריך חיובי.

המכנה חיובי קטן מאוד, כלומר, שואף לאפס מימין.

לאור המסקנות הללו נצפה לקבל תמונת גרף הכוללת נקודת פיתול אחת בלבד מימין ל- $x=1$. נצדיק טענה זו בהמשך. הגרפים המתקבלים (ראו גרף 6):



גרף 6 (מתאר את מקרה 8)

מקרה (9)

$0<a<1$, $a=\frac{p}{q}$, $p<q$,

q אי-זוגי, p זוגי.

הפונקציה: $f(x)=x^{\frac{p}{q}}e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}$,

למשל: $f(x)=x^{\frac{2}{3}}e^{-\left(\frac{2}{3}\right)x}$

המכנה האי-זוגי של מעריך החזקה מאפשר את קיום הפונקציה בכל ציר המספרים.

הנגזרת היא: $f'(x)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$

גם כאן, כמובן, הנגזרת מתאפסת ומחליפה סימן ב- $x=1$.

בראשית הצירים הנגזרת לא מוגדרת, אך ניתן לראות כי הנגזרת מחליפה את סימנה, שכן, כמו קודם, הגבול החד-צדדי מימין לאפס הוא $+\infty$, ואילו הגבול החד-צדדי משמאל הוא $-\infty$

נראו זאת:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)=$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)}{x^{\left(\frac{q-p}{q}\right)}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)=$$

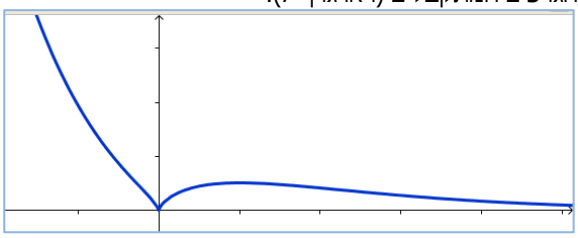
$$\left(\frac{p}{q}\right)\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)}{x^{\left(\frac{q-p}{q}\right)}}=-\infty$$

ההבדל היחיד בין הגבולות הוא בסימן של הביטוי שבמכנה $x^{\left(\frac{q-p}{q}\right)}$ ליד אפס. המונה (כהפרש של מספר זוגי ואי זוגי) הוא אי זוגי וכך גם המכנה.

כאשר השאיפה לאפס היא מימין מכנה זה חיובי, ואילו כאשר השאיפה משמאל, המכנה שלילי. עובדה זו גורמת לכך שבראשית הצירים תהיה לפונקציות בקבוצה זו נקודת חוד. זוהי נקודת רציפות של הפונקציה, אך נקודת אי-גזירות שלה.

לאור המסקנות הללו תמונת הגרף המתקבלת כוללת נקודת פיתול אחת בלבד, בקרן החיובית של ציר ה- x מימין ל- $x=1$, ונקודת פיתול אחת בלבד בקרן השלילית שלו.

הגרפים המתקבלים (ראו גרף 7):



גרף 7 (מתאר את מקרה 9)

מקרה (10)

$0<a<1$, $a=\frac{p}{q}$, $p<q$,

q אי-זוגי, p אי-זוגי .

הפונקציה: $f(x)=x^{\frac{p}{q}}e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}$,

למשל: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}e^{-\left(\frac{1}{3}\right)x}$

גם כאן המכנה האי-זוגי של מעריך החזקה מאפשר את קיום הפונקציה בכל ציר המספרים.

הנגזרת היא: $f'(x)=\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)$

שוב, הנגזרת מתאפסת ומחליפה סימן ב- $x=1$. בראשית הצירים הנגזרת לא מוגדרת, אך היא לא מחליפה את סימנה.

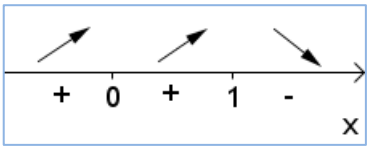
בביטוי $x^{\left(\frac{q-p}{q}\right)}$ מתקיים: מכנה אי זוגי ומונה זוגי (הפרש של שני מספרים אי זוגיים).

הזוגיות של המונה גורמת לכך שהנגזרת תהיה אמנם אינסופית באפס, אך חיובית משני צידיו. כלומר:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{p}{q}\right)\cdot x^{\left(\frac{p}{q}\right)-1}\cdot e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)=$$

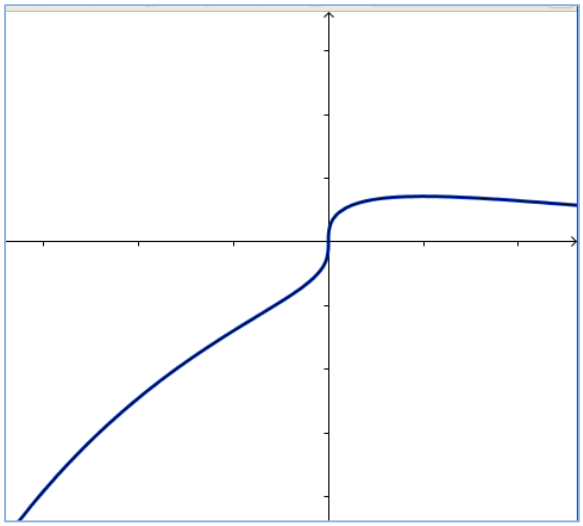
$$\left(\frac{p}{q}\right)\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\left(\frac{p}{q}\right)x}\cdot(1-x)}{x^{\left(\frac{q-p}{q}\right)}}=+\infty$$

וסימני הנגזרת בדיוק כמו במקרה (3):



איור 3

לאור המסקנות הללו תמונת הגרף המתקבלת כוללת נקודת פיתול אחת בלבד, בקרן החיובית של ציר ה- x מימין ל- $x=1$, נקודת פיתול אחת בראשית הצירים, בה הנגזרת השנייה מחליפה את סימנה, למרות שאינה מוגדרת, ונקודת פיתול בקרן השלילית של ציר ה-x (ראו גרף 8).



גרף 8 (מתאר את מקרה 10)

מקרה (11)

$0<a.<1$, אי-רציונאלי.

במקרה זה הפונקציה מוגדרת עבור $x\geq 0$ בלבד, והתנהגותה בקרן זו דומה להתנהגות של שלוש הקבוצות במקרים (8), (9), (10). הגרפים המתקבלים דומים לאלו המתקבלים במקרה (8), אשר גם בו התחום מצומצם לקרן הימנית של הציר.

חקירת נקודות הפיתול:

אישוש לטענותינו ביחס לנקודות הפיתול נקבל דרך חקירה אלגברית של הנגזרת השנייה.

כדי לגזור פעם שנייה ביתר נוחות, נציג את הנגזרת הראשונה כמכפלה של שני גורמים:

$$f'(x)=ae^{-ax}(x^{a-1}-x^{a})$$

$$f''(x)=-a^2e^{-ax}(x^{a-1}-x^{a})+ae^{-ax}((a-1)x^{a-2}-ax^{a-1})$$

$$f''(x)=ae^{-ax}(-ax^{a-1}+ax^{a}+(a-1)x^{a-2}-ax^{a-1})$$

$$f''(x)=ae^{-ax}x^{a-2}(ax^2-2ax+(a-1))$$

הנגזרת השנייה היא מכפלה של שלושה גורמים:

1. פונקציה מעריכית חיובית לכל x שלא תורמת נקודות פיתול: ae^{-ax}

2. פונקציית חזקה שמתאפסת בראשית הצירים, ובהתאם לזוגיות של המונה של a היא משנה את סימנה או לא: x^{a-2}

3. פונקציה ריבועית: $ax^2-2ax+(a-1)$

נחקור את הפונקציה הריבועית:

$\Delta=4a^2-4a(a-1)=4a$.

במשפחתנו, $a>0$ לכן לכל פונקציה במשפחה הגורם הריבועי הזה מתאפס פעמיים. אך צריך לבדוק היכן אפסיו והאם הם שייכים לתחום ההגדרה של הפונקציות.

שני האפסים של הגורם הריבועי נמצאים משני צדי הראשית כאשר: $\frac{a-1}{a}<0$, כלומר כאשר: $0<a<1$. ואמנם במקרים: (8), (9), (10) מתקבלות נקודות פיתול מתאימות לעובדה זו , על-פי הפרוט להלן:

במקרים (8) ו- (11) לפונקציה יש נקודת פיתול אחת בלבד בקרן החיובית של ציר ה- x , והפונקציה לא מוגדרת בקרן השלילית.

במקרים (9) ו- (10) יש שתי נקודות פיתול משני צדי הראשית. במקרה (9) אין נקודת פיתול נוספת, כי הגורם x^{a-2} לא מחליף סימן באפס, מכיוון שהמונה של מעריך החזקה זוגי. במקרה (10) הגורם x^{a-2} מחליף סימן באפס, כי המונה של החזקה אי-זוגי, ולכן יש שם נקודת פיתול שלישית.

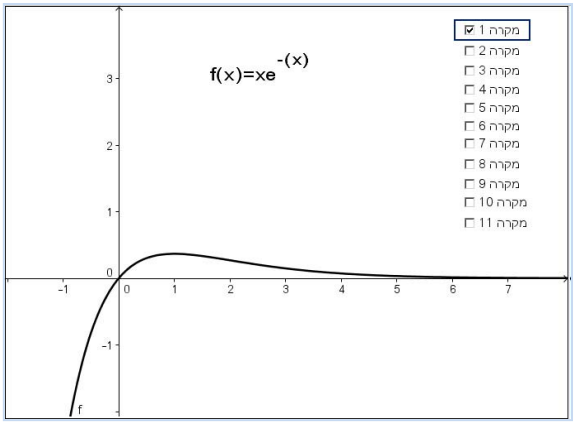
שני האפסים של הגורם הריבועי נמצאים מימין לראשית הצירים, כאשר: $\frac{a-1}{a}>0$ וגם $\frac{2a}{a}=2>0$, כלומר, כאשר: $a>1$ או $a<0$. התחום: $a<0$ לא רלוונטי עבור המשפחה הנחקרת. מתוך כך נובע גם כי לא קיימים ערכים של a בהם יש שתי נקודות פיתול משמאל לראשית הצירים, שהרי קיבלנו שסכום השורשים של הגורם הריבועי חיובי לכל ערך של a.

המקרים: (2) – (6) מתאימים לתנאי $a>1$, ואמנם גילינו בהם שתי נקודות פיתול מימין לראשית הצירים.

במקרים (3) ו- (6) יש נקודת פיתול שלישית בראשית הצירים, היות והגורם: x^{a-2} תורם בהם להחלפת סימן של הנגזרת השנייה שם.

הגורם הריבועי לא מתאפס באפס, אלא כאשר $a=1$ (מקרה 1). ואכן במצב זה יש רק נקודת פיתול אחת, הנגרמת מנקודת האיפוס השונה מאפס של הגורם הריבועי.

לסיכום אנו מציגים את כל המקרים בטבלה 1 (בנספח) ובסרט 1.



סרט 1

סיכום

החקירה שהוצגה כאן מהווה דוגמה לשינוי ההתייחסות לתרגילי חקירה סטנדרטיים, ומציגה אפשרות להפיכתם לבסיס של פרויקט משמעותי, המזמן גיוס כלי ניתוח וחשיבה מתמטית עבור תלמידים ומורים. מתאים לבצע פרויקט חקירה כזה עם תלמידים בכיתות חזקות, כדי להעמיק ידיעותיהם והבנתם בנושאים הנזכרים כאן. למותר לציין שלא רק משפחת הפונקציות שאירחה את החקירה במאמר זה מאפשרת יצירת קישורים וקשרים משמעותיים כאלה. ספרי הלימוד מלאים בהזדמנויות חקירה. צריך רק להעז.

לא רק משפחת הפונקציות שאירחה את החקירה במאמר זה מאפשרת יצירת קישורים וקשרים משמעותיים כאלה. ספרי הלימוד מלאים בהזדמנויות חקירה. צריך רק להעז.

ד"ר חמוטל דוד
בית-הספר הריאלי העברי בחיפה.
הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל.

נספח: סיכום המקרים כולם.

מקרה				נקודות קיצון	נקודות פיתול	תחום הגדרה / אסימפטוטות
1	$a=1$			מקסימום ב: $x=1$	פיתול אחד מימין לראשית הצירים	ת"ה: כל המספרים, אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
2	$a>1$	a טבעי	a זוגי	מקסימום ב: $x=1$ מינימום ב: $x=0$	שתי נקודות פיתול: מימין ל-$x=1$ ובין ראשית הצירים ו-$x=1$	ת"ה: כל המספרים, אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
3			a אי-זוגי	מקסימום ב: $x=1$	3 נקודות פיתול: מימין ל- $x=1$, בראשית הצירים וביניהן.	ת"ה: כל המספרים, אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
4		$=\frac{p}{q}$ רציונלי	q זוגי	מקסימום ב: $x=1$	שתי נקודות פיתול: מימין ל-$x=1$ ובין ראשית הצירים ו- $x=1$	ת"ה: $x \geq 0$ אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
5			q אי-זוגי p זוגי	מקסימום ב: $x=1$ מינימום ב: $x=0$	שתי נקודות פיתול: מימין ל- $x=1$ ובין ראשית הצירים ו-$x=1$	ת"ה: כל המספרים, אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
6			q אי-זוגי p אי-זוגי	מקסימום ב: $x=1$	3 נקודות פיתול: מימין ל-$x=1$, בראשית הצירים וביניהן.	ת"ה: כל המספרים, אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
7		a אי-רציונלי		מקסימום ב: $x=1$	שתי נקודות פיתול: מימין ל-$x=1$ ובין ראשית הצירים ו-$x=1$	ת"ה: $x \geq 0$ אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
8	$0<a<1$	a רציונלי	q זוגי	מקסימום ב: $x=1$	פיתול אחד מימין לראשית הצירים	ת"ה: $x \geq 0$ אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
9			q אי-זוגי p זוגי	מקסימום ב: $x=1$	שתי נקודות פיתול משני צדי הראשית	ת"ה: כל המספרים, בראשית הצירים נקודת אי- גזירות. אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
10			q אי-זוגי p אי-זוגי	מקסימום ב: $x=1$	שתי נקודות פיתול משני צדי הראשית ונקודה נוספת בראשית.	ת"ה: כל המספרים, אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x
11		a אי-רציונלי		מקסימום ב: $x=1$	פיתול אחד מימין לראשית הצירים	ת"ה: $x \geq 0$ אסימפטוטה אופקית: בקרן החיובית של ציר ה- x

טבלה 1