סכום הזוויות במשולש הוא 180° האומנם?

ג'רי רוזן נצה מובשוביץ-הדר

המאמר הנוכחי הינו תרגום ועיבוד של המאמר "The angels sum of a triangle" שפורסם בדצמבר 1992 ב-
Mathematics Teaching no. 141, The Journal of the Association of Teachers of Mathematics in the UK.
במהלך הכנת המהדורה העברית, נפטר ג'רי רוזן ז"ל, ונצה השלימה את הכתיבה לזכרו.

מבוא

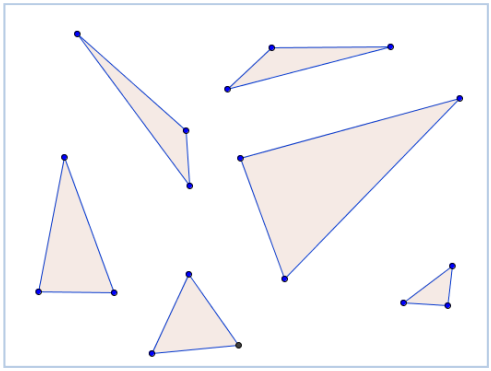
מאמר זה מציג מכתב דמיוני בין שתי תלמידות חטיבת ביניים העוסק בסכום זוויות במשולש. תוך כדי ההתכתבות וההתלבטויות, מתערער הביטחון בכך שסכום הזוויות בכל משולש הוא 180°.

רותי שלום,

מה שלומך? איך החיים באנגליה? אני יודעת שתקופת השבתון של אביך עומדת להסתיים בקרוב, ואנו חבריך בכיתה מחכים לשובך אלינו בספטמבר. אבל עד אז נמשיך להתכתב. זה ממש נפלא לשמור ככה על קשר מדי פעם בפעם.

כידוע לך, כעת המחצית השנייה של כיתה ח', והתחלנו ללמוד גיאומטריה עם המורה לאה. אני רוצה לשתף אותך בחוויות שלנו, כי שיעורי המתמטיקה הם מעניינים מאוד השנה. ובמיוחד רציתי לספר לך על התגלית שאליה הגענו באחד השיעורים האחרונים.

השיעור התקיים ביום האחרון לפני חופש פסח, ולאה חילקה לנו דף עבודה על משולשים. על הדף היו ציורים של שישה משולשים בגדלים שונים ובצורות שונות, והיא ביקשה מאתנו לברר איזה משולש הוא בעל סכום הזוויות הגדול ביותר.



איור 1

לחברים שלנו בכיתה היו דעות שונות, כרגיל, חלק חשבו שהמשולש הגדול ביותר בדף יהיה בעל סכום הזוויות הגדול ביותר. אחרים חשבו על המשולש שבו נמצאת הזווית הקהה הגדולה ביותר. היו כאלה שחשבו שהבחירה הנכונה היא במשולש הכי דומה למשולש שווה-צלעות. לאה לא אישרה אף לא אחת מהצעות אלו, אלא הציעה לנו להוציא את המד-זווית ולבדוק בעזרתו את הזוויות בכל אחד מהמשולשים, וככה להגיע להחלטה מבוססת.

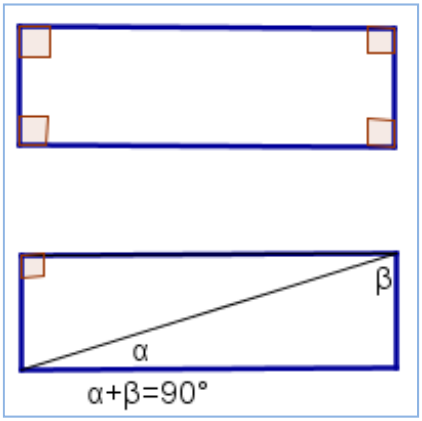
אני הרגשתי די מבולבלת, כיוון שנדמה לי שהמורה אמיר (זוכרת אותו? הוא לימד אותנו בכיתה ה') דרש מאיתנו לזכור את הכלל שסכום הזוויות במשולש הוא 180°. אני זוכרת שהוא נתן לנו הרבה תרגילי חישוב, כדי שלא נשכח. בדף העבודה של לאה חלק מהמשולשים נראו כאילו סכום זוויותיהם גדול מהאחרים, אבל באיזה משולש הסכום הוא הגדול ביותר?

כל אחד מאיתנו הוציא מד-זווית ולאה הזכירה לנו איך להשתמש בו. כשהשווינו את התוצאות בינינו התברר שקשה מאוד לדייק במדידה, ולכן קיבלנו תוצאות שונות למדידה

שעשינו. במיוחד היה קשה לדייק לגבי המשולשים הקטנים. מבין כל הניסיונות שעשינו, הסכום הקטן ביותר שאחד התלמידים קיבל היה 178°, והסכום הגדול ביותר 183°. כך שלא הצלחנו להחליט מהי התשובה הנכונה, וברור שלפי שעה השאלה: "איזה משולש הוא בעל הסכום הגדול ביותר?" נשארה עדיין פתוחה.

ניסינו לחשב את הממוצע הכיתתי לכל משולש וזה הביא אותנו קרוב יותר ל-180°. כשהיינו בכיתה ה' האמנתי למורה אמיר כשלימד אותנו שהסכום הוא 180°, אבל עכשיו, אני אומרת לך, הייתי קצת חשדנית. עידו, הגאון המתמטי של הכיתה שלנו, את יודעת, (הוא נראה ממש טוב, אגב), אמר שהוא יכול להוכיח שבכל משולש הסכום הוא 180°, והשאלה של המורה לאה סתם מכשילה. יש לו אומץ, לא? מכיוון שנשאר זמן עד סוף השיעור, לאה קראה לו ללוח.

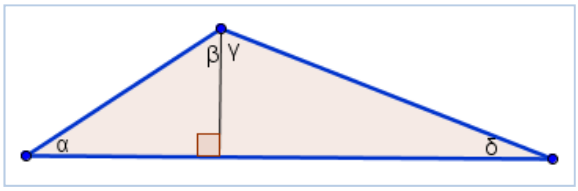
עידו צייר מלבן על הלוח ואמר שכולם יודעים שכל ארבע הזוויות של המלבן הן בנות 90°, לכן סכום הזוויות (הפנימיות, כמובן) במלבן הוא 360°.



איור 2

הוא המשיך: "אם נעביר אלכסון, אנחנו מקבלים חצי מלבן, לכן כל משולש ישר-זווית (שהוא חצי מלבן) הוא בעל סכום זוויות של 180°". (כמובן, שאם תקפלי ותגזרי את המלבן, תוכלי לבדוק שהוא אכן צודק.)

"עכשיו", הוא אמר, "כל משולש יכול להיות מחולק לשני משולשים ישרי-זווית, אבל הזוויות הישרות בכל אחד מהמשולשים האלה הן צמודות אחת לשנייה, על אחת מצלעות המשולש המקורי, ולכן לא תורמות לסכום הזוויות אשר נשאר שווה ל- 180°".



איור 3

המבט של לאה נשאר רגוע. היא לא הגיבה אפילו בתנועת ראש. לא יכולתי להחליט אם היא הסכימה או לא לטענתו של עידו. בנקודה זו צלצל הפעמון. לאה עוד הספיקה לומר שנבחן שוב את הרעיון של עידו אחרי חופשת הפסח, ואיחלה לנו שנשמור על עצמנו בחופש, שנעשה חיים ו...אולי ננסה משולשים אחרים ונחשוב על מה שעשינו בשיעור. לפי דעתי היא רצתה שנמצא דוגמה נגדית כדי לסתור את טענתו של עידו.

נפגשנו כמה חבר'ה בחופשה, ותאמיני או לא, התחלנו לדבר על השיעור. החלטנו לנסות משולשים גדולים יותר. גליה (החברה הכי טובה שלי) הציעה שנסרטט על דף מאוד גדול, ואז ליאור מהכיתה המקבילה הציע שנצא לגינה. סימנו משולש ענקי עם שיפודים בקדקודים, ומתחנו חוט ביניהם ואז מדדנו... אבל שוב קיבלנו פחות או יותר 180°.

את בטח זוכרת שבחופשת הפסח נערכות המון תחרויות שייט. אחי, אדם, ואני נסענו עם חברים לכנרת לצפות באחת התחרויות. ראינו את מארגני התחרות מסמנים שלושה מצופים במרחקים של כ- 2 ק"מ בין מצוף למצוף, כדי ליצור משולש מאוד גדול. ואז היה לנו רעיון נפלא – נבקש לדבר עם אחד ממארגני התחרות ונשאל אותו. מכיוון שהמים היו מאוד שקטים ולא הייתה רוח בכלל, הוא הסכים לקחת אותנו בסירת המנוע של השופטים, כדי לבדוק את הממדים ואת זוויות המשולש על משטח מי האגם. הייתה לו על הסירה מערכת ניווט מתוחכמת עם מחשב, לכן ציפיתי שזה ייתן בדיוק 180°, אם עידו והמורה אמיר אמנם צדקו.

שטנו למצוף הראשון והשופט תיכנת את המסלול למצוף השני. כשהגענו אליו הראה צג המחשב – 2 ק"מ. השופט תיכנת את המסלול למצוף השלישי והייתי קצת מופתעת שהמחשב הורה זווית מדויקת של 80° בתוך המשולש של

המסלול. (עשינו סיבוב של 100° מכיוון המצוף השני לכיוון המצוף השלישי.)

ציפיתי לתוצאה בסביבת ה- 60° מפני שהבנתי שהמסלול אמור להיות בצורה של משולש שווה-צלעות. חשבתי שאולי המצופים זזו. הגענו למצוף השלישי והמחשב הראה 2 ק"מ. והכיוון למצוף הראשון תוכנת. המחשב שוב הראה זווית מדויקת של 80° גם בסיבוב זה. עכשיו הייתי ממש משוכנעת שהמצופים זזו, ושהצלע השלישית תהיה קצרה מ- 2 ק"מ. והזווית החסרה תהיה בערך בגודל של 20°. אבל לא! צג המחשב שוב הראה 2 ק"מ. והפעם, הפתעה, זווית מדויקת של 62°.

לא האמנתי למראה עיניי. נסענו מסלול שהוא "משולש שווה-צלעות" (כל צלע 2 ק"מ) וסכום הזוויות בו הוא של 222° ($62^\circ + 80^\circ + 80^\circ$), השופט אמר שהציוד תקין. איך זה ייתכן? התרגשנו מאוד וחיכינו כבר שהחופשה תסתיים כדי שנוכל לספר את זה למורה לאה. מאוד רציתי להראות את זה גם לעידו.

כשחזרנו ללימודים, לאה הזכירה לנו את השיעור האחרון שלנו לפני החופשה, והעירה שבקרוב נוכיח שסכום הזוויות בכל משולש הוא 180°. היא גם אמרה שלא קיבלנו בדיוק 180° מפני שהיה קשה למדוד במדויק עם מד-זווית. והוסיפה שבאוניות יש מצפנים מאוד מדויקים, לוויינים ומחשבים וכו', המאפשרים להם לנווט נתיבים ולמדוד זווית בצורה מאוד מדויקת. (עידו לחש שהמורה התכוונה למערכת ה- GPS).

בשלב זה החלטתי לספר ללאה ולכל הכיתה על הטיול של אחי, אדם, ושלי לכנרת ועל מה שחווינו. בהתחלה לאה לא האמינה, אך הראיתי לה את המכתב שקיבלנו ממדריך השייט שאישר את התוצאות. לאה אמרה שהיא צריכה לחשוב על זה קצת. בינתיים הראתה לנו עוד הוכחה שמסבירה למה סכום הזוויות בכל משולש חייב להיות 180°. מעולם לא הייתי כה מבולבלת. מתמטיקה יכולה לפעמים לשגע את המוח...

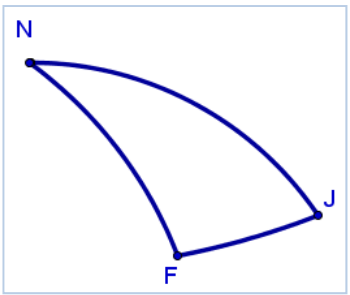
למחרת לאה נכנסה לכיתה ופתחה את השיעור בסיפור:

"צלם של תופעות טבע עזב את הבקתה שלו בחיפוש אחרי דובים. הוא הלך דרומה למרחק של 2 ק"מ. ולא ראה, לא דובים ולא יער. הוא פנה מזרחה והלך 2 ק"מ. ועדיין לא ראה דוב, אז החליט לפנות צפונה ועבר 2 ק"מ נוספים. ולהפתעתו הגדולה, מצא את עצמו חזרה בבקתה שלו. לא, לא היה דוב בבקתה! (גם שמו לא היה דוב, אחרת היה רואה דוב במראה כאשר התגלח בבוקר...). כאן לאה עצרה ושאלה: איפה נמצאת הבקתה? איזה סוג של דוב ניסה הצלם לצלם? ואיזה סוג מסלול עבר? "

את בטח מבולבלת כמו שאני הייתי, נו באמת – איך זה יכול להיות שהצלם הלך דרומה, מזרחה, וצפונה, ומבלי לפנות מערבה חזר לבקתה שלו. טוב, לא אשאיר אותך במתח, התשובה לחידה היא שהבקתה ממוקמת בקוטב הצפוני, והצלם ניסה לצלם דב לבן. עידו העיר שזה לא בהכרח נכון, כי ייתכן שהצלם נמצא באזור הקוטב הדרומי והוא עשה סיבוב שלם מזרחה, ולכן אין פלא שלא ראה אף לא דוב אחד – לבן, חום, שחור או כל צבע אחר. מתאים לעידו לחשוב על הבלתי צפוי. (אני לא הייתי בטוחה אם היו או לא היו דובים ליד הקוטב הדרומי אבל חשבתי שעדיף לחכות עם השאלה הזו עד השיעור למדעי הטבע.)

יחד עם לאה, דנו בחידה בכיתה ודיברנו גם על הקשר שלה לטיול של אדם ושלי בכנרת. נראה כי שטנו במסלול "משולש" דומה לזה של הצלם בקוטב הצפוני.

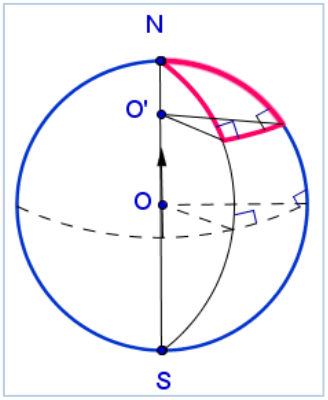
הצלם חשב שהוא מטייל לאורך 3 צלעות של ריבוע, אך למעשה הוא הלך לאורך שלוש "צלעות" של "משולש" שווה-צלעות שאורך כל צלע שלו 2 ק"מ. צלעות אלו נמצאות על-פני כדור (כדור הארץ), ולכן הליכתו קודם דרומה, אחר-כך מזרחה, ובסוף צפונה, הביאה אותו חזרה הביתה לבקתה שלו. כדי לעזור לנו להבין טוב יותר, לאה ציירה את הציור הבא על הלוח:



איור 4

לא האמנתי למראה עיניי. נסענו מסלול שהוא "משולש שווה-צלעות" (כל צלע 2 ק"מ) וסכום הזוויות בו הוא של 222°

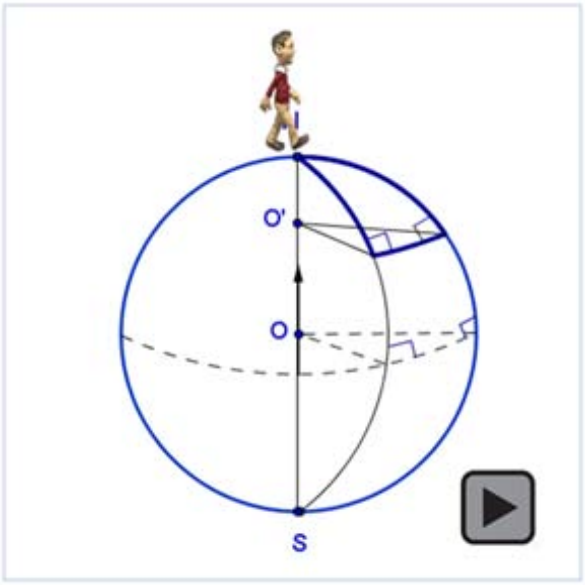
הצלם הלך לאורך הקשתות JN, FJ, NF ולא על ההיקף של משולש שטוח או מישורי, לכן המשפטים בהם השתמשנו לא מתאימים כאן. הצלם היה מופתע מכיוון שחשב שהוא עובר על צלעות של ריבוע, כי יש שתי זווית של 90° במהלך המסלול שלו. אבל למעשה, כשהביט בתמונת לוויין על מנת לחפש את הדוב, הוא ראה את העקבות שלו בשלג ומהאוויר הם נראו כמו ה"משולש" האדום שבאיור 5.



איור 5



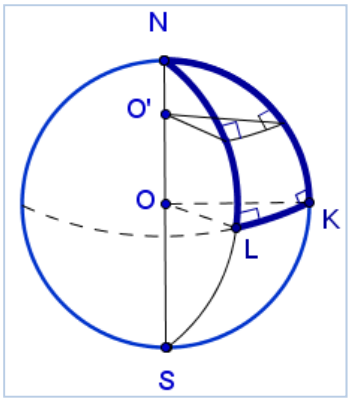
אם תסתכלי בגלובוס שהדוד שלך קנה לך בשנה שעברה, הפרדוקס יהיה ממש מובן (אני מקווה!).



סרט 1 (Acrobat 9)

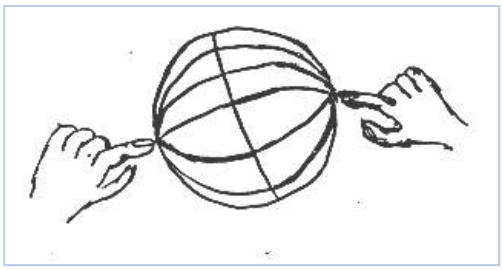
בשלב זה אחי, אדם, נכנס לתמונה. כאשר סיפרתי לו בבית מה התרחש עד עכשיו בכיתה שלנו, הוא לקח את הגלובוס שלנו והצביע על קו המשווה ועל קווי האורך.

הוא ציין כי מכיוון שכל קו אורך יוצר זווית ישרה עם קו המשווה, קל ליצור על-פני כדור הארץ "משולש" שסכום הזוויות שלו הוא יותר מ- 180°. למשל, יש ל ΔNLK שתי זוויות ישרות, האחת בנקודה L, ושנייה בנקודה K, בתוספת זווית ב- N (ראי איור 6).



איור 6

אדם אמר לי לתפוס את הכדור בעזרת אצבע אחת בכל יד. האצבעות היו צריכות להיות בקצוות של קוטר, כדי לא להפיל את הכדור כאשר הוא סובב אותו.



איור 7

פעילות זו עזרה לי לדמיין את המעגלים הגדולים ביותר על-פני הכדור שעברו דרך כל אחת מאצבעותיי, שהחזיקו בכדור בזמן סיבובו (למשל NKS). הקו הישר שמחבר בין האצבעות התופסות את הכדור עובר דרך מרכז הכדור והוא קוטר הכדור. אדם גם הביא לתשומת לבי את העיגול הגדול שהוא מאונך **לכל** המעגלים שעברו דרך שתי אצבעותיי (כמו קו המשווה). כדאי לך לנסות ותראי בעצמך.

בשלב זה אחי אדם התחיל להתעניין עוד יותר בבעיה. הוא ציין כי קיימים בבירור "משולשים" גדולים מאוד שצלעותיהם על "המעגלים הגדולים" על-פני כדור הארץ, שבהם סכום הזוויות גדול מ- 180°, למשל משולש NKL. זה ברור לחלוטין. אפשר לחשוב על כך שאם הצלם היה נע דרומה מהבקתה שלו בקוטב הצפוני עד קו המשווה, ואז מזרחה לאורך קו המשווה בכל מרחק שהוא, ואז שוב צפונה לבקתה שלו בקוטב הצפוני, הוא היה עובר קשתות של "משולשים"

ענקים שסכום זוויותיהם גדול מ- 180°. אפילו יותר! אפילו 270°! האם את מצליחה לראות משולש כזה בסרטוט?

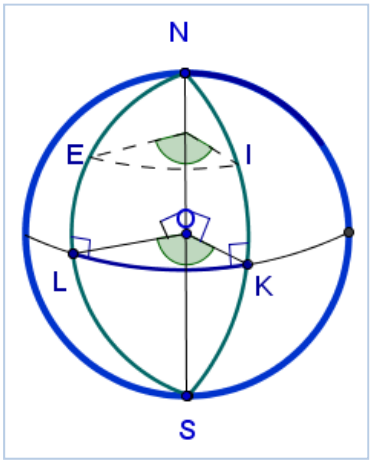
כאן אחי עצר ושאל את עצמו: מעניין, איזה מרחק על-פני כדור הארץ, צריך מישהו לעבור בכל צד, על מנת ליצור "משולש שווה-צלעות" שסכום זוויותיו הוא 181°? האם מסלול כזה אפשרי? אם כן, אדם היה רוצה לטייל לאורכו.

לא ממש הבנתי את המתמטיקה של החישובים של אדם, אבל למען הסדר הטוב, כי מתישהו בטח נלמד את החומר הזה לקראת מבחני הבגרות, שמרתי על כל החישובים.

והנה הם:

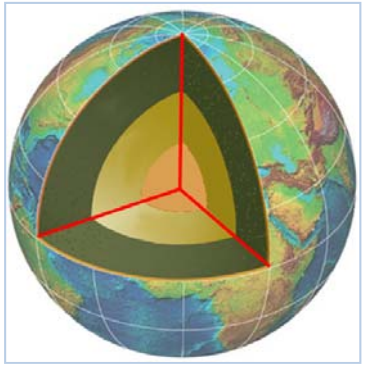
מעגל שקוטרו הוא גם קוטר של הכדור נקרא "מעגל גדול". והדרך הכי קצרה בין שתי נקודות כלשהן על פני הכדור היא הקשת של המעגל הגדול העובר דרכן. מעגל כזה מרכזו במרכז הכדור (!).

נתבונן בכדור :



איור 8

הזווית שבין קווי האורך בנקודה 0 (מרכז כדור הארץ) שווה לזווית בנקודה N - הקוטב הצפוני $\measuredangle KOL = \measuredangle KNL$.



איור 9

חצי המעגלים הגדולים $NIKSON$ ו- $NELSON$ הם כמו שני עמודים של ספר על ציר $NO'OS$.

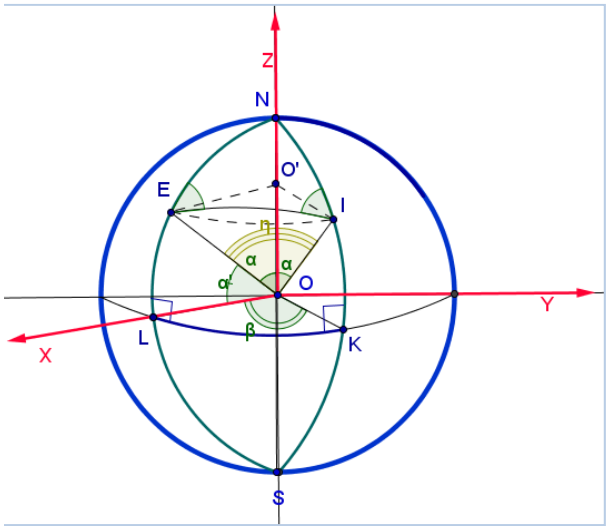
למשל, אם הכדור הוא כדור הארץ אז $NELSON$ יכול היה להיות קו האורך $\beta = 0^\circ$ של גריניץ' בלונדון, ו- $NIKSON$ קו האורך העובר דרך ישראל $\beta = 34^\circ 45'$.

בסרטוט הקשת LK היא על קו המשווה ו- N מסמן את הקוטב הצפוני.

במשולש NKL :

$$\measuredangle K = 90^\circ, \measuredangle L = 90^\circ, \measuredangle KOL = \measuredangle N = \beta$$

נגדיר מערכת צירים תלת-ממדי OX, OY, OZ כך שנקודה L נמצאת על OX ונקודה N נמצאת על OZ. תשימי לב שהנקודה K אינה בהכרח על OY (ראי איור 10).



איור 10

אנחנו מקבלים:

$$\overrightarrow{OL} = (R, 0, 0) = R(1, 0, 0)$$
$$\overrightarrow{ON} = (0, 0, R) = R(0, 0, 1)$$
$$\overrightarrow{OK} = (R\cos\beta, R\sin\beta, 0) = R(\cos\beta, \sin\beta, 0)$$

נחפש "משולש" שהוא גם שווה-צלעות וגם סכום זוויותיו גדול מ- 180°. למשל, משולש NEI כאשר ניקח את הקשת EI של הגזרה EOI.

מטרתנו לחשב את אורך כל אחת מצלעות משולש זה.

אורך צלע l (קשת) של "משולש" הוא אורך הקשת של הגזרה EOI, כאשר η היא גודל זווית גזרה זו. כמו כן ידוע שהיקף כדור הארץ הוא 40,000 ק"מ.

$$l = 40000\frac{\eta}{360^\circ}$$

בדרך כלל, על כדור הארץ מסמנים קווי רוחב לפי זווית: $\sphericalangle EOL = \alpha'$ כאשר קו המשווה מקיים $\alpha' = 0^\circ$. עבור "משולש" ENI אנו צריכים זווית $\sphericalangle EON = \alpha$, זווית הרוחב כאשר: $\alpha' + \alpha = 90^\circ$, כלומר:

$$\sphericalangle ION = \sphericalangle EON = \alpha$$

שיעורי הווקטורים $\overrightarrow{OI}$ ו- $\overrightarrow{OE}$ הם:

$$\overrightarrow{OE} = R(\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)$$

$$\overrightarrow{OI} = R(\sin\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha)$$

כלומר:

$$|OE|^2 = R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = R^2$$

$$|OI|^2 = R^2(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha)$$

$$= R^2(\sin^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \cos^2\alpha) = R^2$$

ולכן:

$$|OI| = |OE| = R$$

ומכאן לפי מכפלה סקלארית:

$$\overrightarrow{OE}\bullet\overrightarrow{OI} = |OE|\cdot|OI|\cos\eta = R^2\cos\eta =$$

$$= R^2(\sin^2\alpha\cos\beta + 0 + \cos^2\alpha)$$

ומכאן: $\cos\eta = \sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha$

כדי שהמשולש NEI יהיה משולש שווה-צלעות אנו צריכים ש: $\sphericalangle N = \sphericalangle E = \sphericalangle I = \beta$ ורצינו ש:

$\sphericalangle N + \sphericalangle E + \sphericalangle I > 180^0$.

בנוסף $\alpha = \eta$ כדי שהקשתות: $E\hat{I} = N\hat{I} = N\hat{E}$

$$\cos\eta = \sin^2\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha \rightarrow$$

$$\cos\alpha = \sin^2\alpha\cos(\sphericalangle N) + \cos^2\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos(\sphericalangle N)$$

ידוע ש: $\alpha \neq 0$ וגם $(1 - \cos\alpha) \neq 0$

ולכן: $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \cos(\sphericalangle N)$

עכשיו אדם הציב ערכים ואני עזרתי לו עם המחשבון, כדי להגיע לסכום של 181°, הגענו לצלע באורך של 1274.9 ק"מ, וואו! (ראי טבלה 1)

כלומר, נצטרך לנסוע קרוב ל- 1300 ק"מ בכל צלע על מנת ליצור משולש שווה-צלעות שסכום זוויותיו 181°.

אורך צלע של "משולש שווה-צלעות" בק"מ: l	$\alpha = \frac{l}{40000}\cdot 360^\circ$	$\sphericalangle N = \cos^{-1}(\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha})$	$\sphericalangle E + \sphericalangle N + \sphericalangle I$
0	0°	60°	180°
111	1°	60°	180°
1000	9°	60.20°	180.18°
1274.9	11.47°	$60.33...^\circ$	181°

אחרי כל אלו עלו בראשי שאלות נוספות, ורציתי לשתף אותך: האם קיימים משולשים שסכום זוויותיהם גדול מ- 270°? מה עם משולשים שסכום זוויותיהם גדול מ- 360°? האם הם קיימים בכלל? מצפה לתשובתך ומתגעגעת מאוד.

רותי

מקורות

Hogben. L. (1967). *Mathematics for the Million*. London: Pan books Ltd.

Hooper, A. (1948). *Makers of Mathematics*. New York: Random House..

Kline, M. (1968). Geometry, Mathematics for the Modern World. Readings from *The Scientific American*. W.H. Freeman & co.

Macbeath, A.M. (1964). *Elementary Vector Algebra*. Oxford University Press.

Movshovitz-Hadar, N.(1988). School Mathematics Theorems – an Endless Source of Surprise. *For the Learning of Mathematics*, *8*(3). 34-40.

Rosen, G. & Movshovitz-Hadar, N. (1992). The Angle Sum of a Triangle Is 180°, or Is It? *Mathematics Teaching, 141,* December 92, 30-33.

כל קשר למצבים אמיתיים ולאנשים קיימים הינו מקרי... הרעיון למאמר זה נולד כאשר הכותב הראשון שאל שאלה לאחר סדנה שניתנה על-ידי הכותבת השנייה. החלטנו לתת למאמר צורה של מכתב כדי להעביר מסר גם לתלמיד וגם למורה.

ג'רי רוזן ז"ל

1942-2008, מורה מסור, מחנך ומתמטיקאי. בעל רעיונות יצירתיים בחקירות מתמטיות ובדרכי הוראה.
זכור בקרב מורי המתמטיקה בארץ בעקבות מגוון ההשתלמויות שהעביר. השתלמויות שאופיינו ביצירתיות ובפעילויות ידידותיות ללומדי המתמטיקה.
יהי זכרו ברוך.

פרופ' נצה מובשוביץ-הדר
הטכניון, המחלקה להוראת המדעים.