משחקים כסביבה להצגת מושגים ומשפטים מתמטיים ולפתרון בעיות

חלק ב

נצה מובשוביץ-הדר

מאמר זה הוא המשכו של המאמר מגיליון 39 - http://highmath.haifa.ac.il/data/alle39-8.pdf. בהיות משחק פעילות חביבה על רוב בני האדם ועל הצעירים שבהם במיוחד, הסביבה המשחקית היא קרקע נוחה ליצירת יחס אוהד ללמידה. בחלק הראשון של המאמר הוצגו שתי דוגמאות: המשחקים "קפיצות על לוח דמקה" ו"צביעה של מפות", בחלק זה מוצג משחק שלישי שאחת ממהדורותיו נקראת גם "משחק הכאוס".

המשחק של סירפינסקי

זהו משחק שבאמצעותו מתוודעים לכברת סירפינסקי ולרעיון מתמטי מפתיע: ההסתברות למצוא באקראי נקודה מתוך קבוצה אינסופית של נקודות יכולה להיות...אפס!

מספר המשתתפים: זהו משחק לשחקן יחיד, לשניים או יותר שחקנים.

העזרים הנחוצים: נייר ועליו מסורטט משולש גדול שווה-צלעות (לוח המשחק), עיפרון וסרגל-מידה או מחוגה (רצוי שיהיו עותקים אחדים לכל זוג משתתפים).

כללי המשחק: בסיבוב הראשון כל שחקן בוחר נקודה בתוך המשולש ומסמן אותה כ"נקודת המוצא" שלו (רצוי ששני השחקנים יתנו לנקודות שלהם סימני היכר שונים, כגון: X, 0).

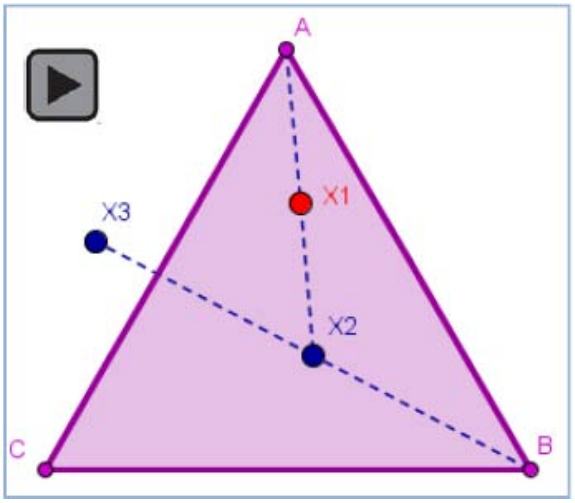
בסיבוב השני, כל שחקן בתורו מסמן על הדף נקודה שנייה משלו, באופן הבא: תחילה בודקים איזה קדקוד הוא הקרוב ביותר לנקודת המוצא, ומחברים אותו אליה בקטע. על המשך הקטע הזה מסמנים נקודה שמרחקה מהקדקוד כפול ממרחקה של נקודת המוצא מהקדקוד. הנקודה החדשה משמשת כנקודת מוצא לסיבוב הבא, וחוזר חלילה.

באופן כללי, בכל סיבוב מתקבלת נקודה חדשה שהיא השיקוף בנקודה הקודמת של הקדקוד הקרוב אליה ביותר.

המנצח: מנצח השחקן שמצליח לשרוד בתוך המשולש יותר מהשני, כלומר, הראשון שהנקודה החדשה שלו "ברחה" אל מחוץ למשולש מפסיד. המשחק מסתיים בתיקו אם הנקודות של שני השחקנים "ברחו" אל מחוץ למשולש באותו סיבוב.

דוגמה

בסרט 1 מופיעה דוגמה למהלך של שחקן, שסימנו x, שאחרי שלושה סיבובים הנקודה שלו "בורחת" אל מחוץ למשולש. אם היריב (שאיננו מסומן בתרשים) נמצא עדיין בתוך המשולש בשלב זה, אזי השחקן שסימנו x מפסיד. אם היריב יצא החוצה כבר בסיבוב השני, אזי השחקן שסימנו x מנצח, ואילו אם שניהם יצאו החוצה בסיבוב השלישי, המשחק מסתיים בתיקו.



סרט 1 (גרסה Acrobat 9)

השאלה הבסיסית היא: איזו נקודה (או נקודות) כדאי לשחקן לבחור כנקודת מוצא, כדי להבטיח לעצמו ניצחון

(או לפחות תיקו) במשחק? במילים אחרות: מכל נקודה במשולש, כמה פעמים אפשר להכפיל את המרחק מהקדקוד הקרוב ביותר, מבלי לצאת מהמשולש?

שאלות מנחות:

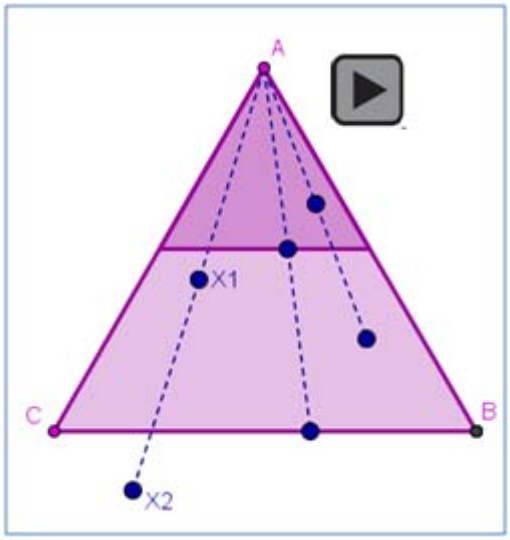
א. אילו נקודות בתוך המשולש הן "מוקשים"? כלומר, צריך להימנע מלהגיע אליהן, כי הדרך מהן מובילה בצעד הבא החוצה. (רמז: הבדיקה יכולה להתחיל מהתייחסות אל הנקודה השנייה בדוגמה שלעיל, שהובילה את השחקן החוצה במהלך השלישי.)

ב איך אפשר להימנע מלעלות על נקודת "מוקש"?

תשובות

אנו שואלים אילו נקודות במשולש "ממוקשות", כלומר, בחירה בהן תביא אותנו אל מחוץ למשולש ולהפסד במשחק.

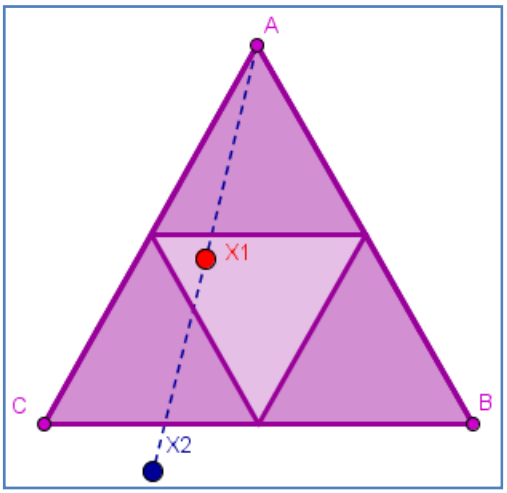
בכדי לפשט את הבעיה נבחר את הנקודה הראשונה קרובה לקדקוד A. ונשאל אילו נקודות במשולש יביאו אותנו אל הצלע שממול (BC), או במילים אחרות מהו קו הגבול של הנקודות הממוקשות?



סרט 2 (גרסה Acrobat 9)

בסרט 2 ניתן לראות כי קטע האמצעים של המשולש הוא קו הגבול, כל הנקודות שמתחתיו "ממוקשות" (מדוע?). מאותם שיקולים אם נבחר נקודה ראשונה הקרובה ל- B או ל- C נוכל לומר שכל שלושת קטעי האמצעים של המשולש מהווים "גבול" לאזור הממוקש, וכל אחת מהנקודות של המשולש הפנימי המוצג באיור 1 גם היא "מוקש".

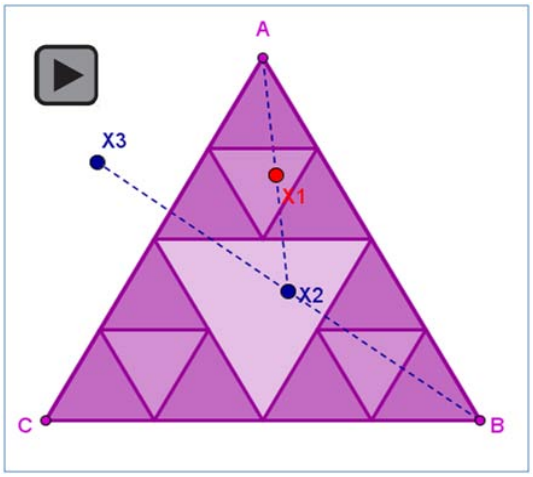
לפיכך, בחירת נקודה המובילה למשולש הפנימי המוצג באיור 1, תוביל בצעד הבא אל מחוץ למשולש, ולכן כל נקודה שמובילה לתוך המשולש הפנימי, היא נקודת מוצא שלא יכולה להבטיח ניצחון, ולכן גם היא "מוקש".



איור 1

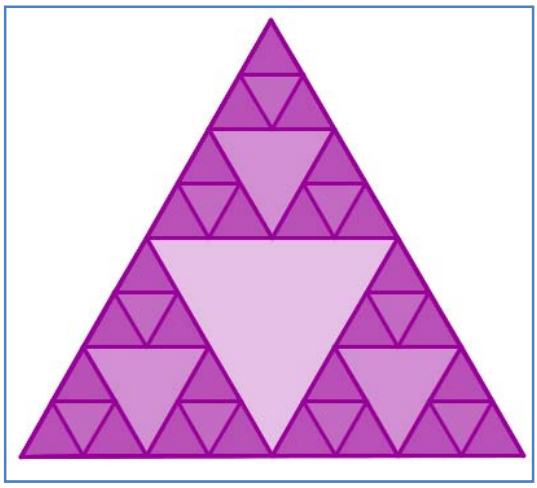
איפה נמצאות הנקודות המובילות לתוך המשולש הפנימי?

במשולשים הקטנים יותר המסומנים בנקודות בסרט 3.



סרט 3 (גרסה Acrobat 9)

אם נחזור על התהליך שוב ושוב נקבל סדרה אינסופית של משולשים קטנים והולכים, שהשטח של כל אחד מהם הוא רבע משטח המשולש בו הוא כלוא. המהלך מוביל לאיתור כל נקודות ה"מוקש". וכך, מנקודות המבטיחות ניצחון, או לפחות תיקו, מתקבלת קבוצת הנקודות של התצורה הידועה בשם: "כברת סירפינסקי" Sierpinski's gasket. (איור 5).

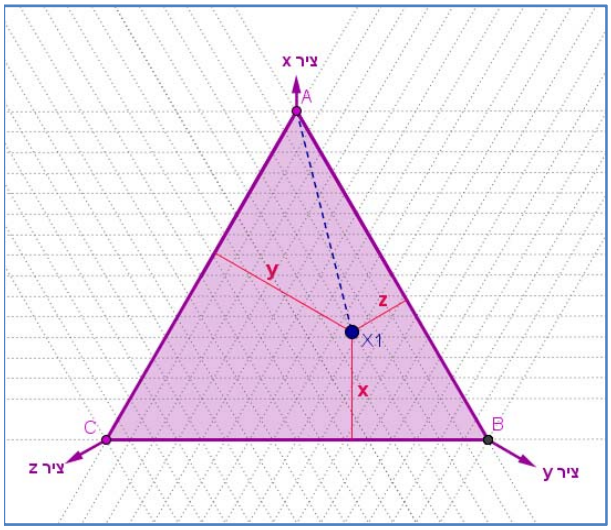


איור 5

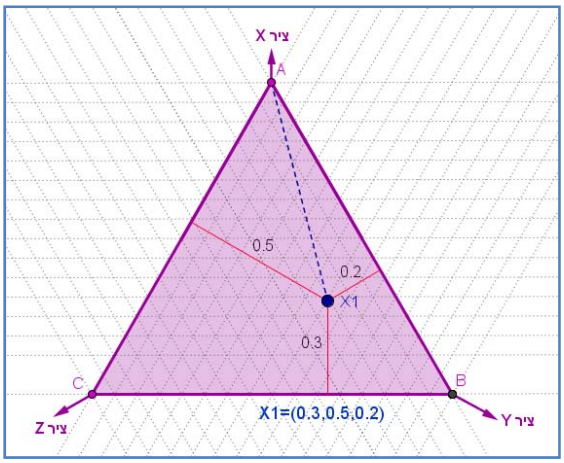
מבט אלגברי על המשחק

כמו שנראה בהמשך, ניתוח אנליטי של המשחק שופך אור נוסף על המתמטיקה הטמונה בו. אפשר לנתח את ההתנהגות של הנקודות על-ידי הכנסת מערכת צירים מתאימה וציון הנקודות על-פי שיעוריהן. דרך נוחה (אם כי לא מקובלת) היא להגדיר במישור שלוש קואורדינטות לפי שלושת צירי השיקוף של המשולש, כמתואר באיור 6 ובאיור 7.

במערכת צירים זו שלושת שיעורי נקודה במשולש הם מרחקיה מהצלעות.

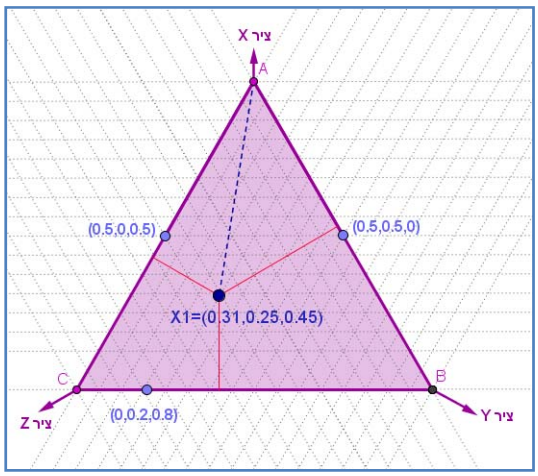


איור 6



איור 7

ראו באיור 8 וביישום האינטראקטיבי 1 דוגמאות לשיעורי הנקודה במערכת צירים זו. שימו לב, כי שיעור x של הקדקוד A הוא 1 , ושל נקודה על הצלע שמולו הוא 0. שיעור Y של הקדקוד B הוא 1, ושל נקודה על הצלע שמולו הוא 0. ושיעור Z של הקדקוד C הוא 1, ושל נקודה על הצלע שמולו הוא 0. כמו כן, השיעורים של נקודת האמצע של AC הם: $x = 0,\ y = z = 0.5$.



איור 8



חשוב לשים לב לתכונות המיוחדות הנובעות מהגדרת מערכת צירים זו:

1. הקואורדינטות אינן בלתי תלויות!

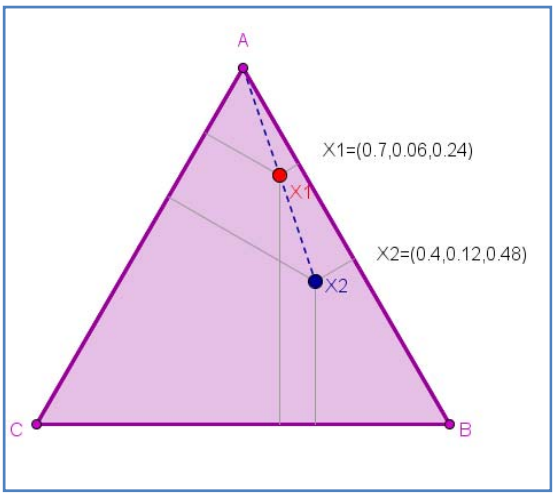
2. כל הנקודות בתוך המשולש הן בהכרח בעלות שלושה שיעורים חיוביים בין 0 ל- 1 .

3. הנקודה ששיעוריה הם (0,0,0) לא קיימת.

4. אפשר לתאר ישרים במערכת הצירים על-ידי משוואה (למשל, מהי המשוואה של כל אחד מהישרים העוברים דרך צלעות המשולש?).

5. סכום השיעורים של כל נקודה הוא 1 (מעניין להוכיח זאת).

ועתה לניתוח המשחק: נסמן את שיעורי נקודת המוצא ב- (x_1,y_1,z_1). שוב, בכדי לפשט את הבעיה, נבחר את הנקודה הראשונה קרובה לקדקוד A. הנקודה במהלך הבא של המשחק מתקבלת על-ידי הכפלת המרחק של X1 מהקדקוד A.



איור 9

ולכן, כפי שאפשר לראות באיור 9 וביישום האינטראקטיבי 2, שיעורי הנקודה במהלך הבא הם: $X2=(2x_1-1,2y_1,2z_1)$. שיעור x של הנקודה החדשה הוא $2x_1-1$ (מדוע?), שיעור y ושיעור z הוכפלו פי שניים (דמיון משולשים).

מכאן אפשר להסיק שכדי לא לצאת מהמשולש במהלך השני, שיעורי הנקודה הנבחרת צריכים לקיים את התנאים הבאים: $0<2x-1<1,\ 0<2y<1,\ 0<2z<1$

כלומר: $\frac{1}{2}<x<1,\ 0<y<\frac{1}{2},\ 0<z<\frac{1}{2}$

"שם אינטראקטיבי 2"

מהנ"ל נובע כי אוסף הנקודות הנמצאות בתוך המשולש הנוצר מקטע האמצעים וקדקוד A הן נקודות "בטוחות" (במקרה שהנקודה הנבחרת קרובה ל- A), (כמתואר באיור 2). וכל נקודה מחוץ לתחום זה מהווה נקודת "מוקש".

וכך, כמו בניתוח הגיאומטרי, אפשר להמשיך ולהגדיר את התחומים שמהם מגיעים אל ה"תחום הממוקש", שגם הם הופכים לתחום ממוקש, וכך הלאה, ומקבלים שוב את כברת סירפינסקי.

בנוסף, אם עוברים לסימון הקואורדינאטות **בשיטה הבינארית**, כמתבקש מההכפלה החוזרת, האריתמטיקה נעשית יותר פשוטה, כי הכפלה ב- 2 בבסיס 2 מתבטאת בהזזה שמאלה של הנקודה, והיות וסכום הקואורדינאטות של נקודה פנימית במשולש חייב להיות 1, האפיון האריתמטי של נקודת מוצא בטוחה, הוא האפיון האריתמטי של הנקודות בכברת סירפינסקי.

אנאליזה אריתמטית מלאה של המשחק אפשר למצוא בעמודים 23-24 בספרו של שרדר Schroeder (1991).

אחרי שמצאנו כי התחום הממוקש יוצר את כברת סירפינסקי עולות השאלות הבאות:

1. מהו השטח הכולל של אזורי המוקשים, ביחס לשטחו של המשולש המקורי? (אפשר, למען הנוחיות, להניח ששטח המשולש המקורי הוא יחידה אחת.)

2. מה נובע לגבי קיומה של נקודה "בטוחה" בתוך המשולש?

3. מהי ההסתברות של נקודה אקראית להוות נקודת מוצא, המבטיחה הישרדות אינסופית בתוך המשולש?

מצאנו כי התחום הממוקש מתאים לכברת סירפינסקי. קבוצה זו היא למעשה קבוצת קנטור דו-ממדית, או פרקטל שממדו בין 1 ל- 2 $\left(\frac{\log 3}{\log 2}\sim 1.58\right)$. השטח של קבוצה זו הוא 0, ולכן לבחירה של נקודה אקראית כנקודת מוצא יש הסתברות 1 להוביל החוצה.

באורח פרדוקסאלי, מספר נקודות המוצא המבטיחות ניצחון, או לפחות תיקו, הוא בלתי ניתן למנייה, ואף-על-פי-כן יש מעט מאוד נקודות כאלו. "מעט מאוד" במובן

שלבחירה אקראית של נקודת מוצא, יש הסתברות אפס להישרדות אינסופית, לפי כללי המשחק.

הערה: אפשר גם כאנאלוגיה חד-ממדית לחלק הממוקש במשולש, במשחק זה, לבנות על קטע היחידה סדרה של קטעים חלקיים, שמידתה הכוללת היא 1. איך אפשר לעשות זאת? האם אפשר לבנות גם אנאלוגיה תלת-ממדית?

ולבסוף, ראוי להזכיר גם את המשחק ההופכי למשחק זה המוכר בשם: **"משחק הבלגן" (Chaos Game).** זהו משחק לשחקן יחיד, שהומצא על-ידי מיכאל בארנסלי, ומתואר בספרו Barnsley (1988).

המשחק של ברנסלי הוא מעין משחק קובייה. בתחילתו השחקן בוחר באקראי נקודה כלשהי בתוך המשולש. מכאן ואילך, כל צעד נקבע על-פי הטלת קובייה, בעלת שלושה ערכים שונים a, b, c, שווי-סבירות (איך אפשר לבנות קובייה כזאת מקובייה משחק רגילה?). על-פי תוצאת ההטלה נקבע אחד הקדקודים של המשולש A, B, C. אליו מחברים את הנקודה שהתקבלה בסיבוב הקודם. הנקודה החדשה מתקבלת על-ידי חציית הקטע המחבר את הנקודה הקודמת עם הקדקוד שהוגרל. ההישג הגדול במשחק הוא לקבל את כברת סירפינסקי כתוצאה מהמשחק. אם במקום הטלת קובייה מפתחים אסטרטגיה לבחירת הקדקודים, ההישג הזה אפשרי. ראה עמ' 28-29 בספר של שרדר הנזכר לעיל. מהדורות דיגיטליות של המשחק מופיעות באתר:

http://serendip.brynmawr.edu/playground/sierpinski.html

http://www.geom.uiuc.edu/java/LeapFractal/

כמה מילים לסיום

שני חלקי המאמר הציגו שלושה משחקים, שכל אחד מהם מהווה במה להעלאת שאלות , להנמקה של דרכי הפתרון, ולאישוש או הפרכה של השערות. אלה האחרונות הן עמודי התווך של החשיבה המתמטית. כל מורה למתמטיקה מצווה על יצירת הזדמנויות לעסוק בהן, וכל המרבה הרי זה משובח. אם העיסוק בפעילויות אלו משולב גם בהנאה הכרוכה במשחק – על אחת כמה וכמה. שהרי יצירת יחס אוהד למקצוע היא אחת המטרות שכל מי שהתברך ביכולת לראות את היופי האצור במקצוע הזה, חייב לחתור להשגתה ולא להרפות.

תודות

תודתי והערכתי העמוקה לד"ר ורדה טלמון, לגאולה סבר ולשולמית אליקן שטרחו והוסיפו את הסרטונים, ובכך העלו את רמת הבהירות של הדברים לאין שיעור.

מקורות

Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*. California: Academic Press .

Schroeder, M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws - Minutes from an Infinite Paradise, (* pp. 20-25). New York: W.H. Freeman.

Peirgen, H.O., Jürgen, H., & Saupe, D. (1992). *Fractals for the Classroom, Part I: Introduction to Fractals and Chaos,* (pp. 41-43, 148-150, 319-322). New-York: Springer-Verlag.

http://www.**amazon**.com/exec/obidos/ISBN=0120790629/ctksoftwareincA/

http://chaostheory.suite101.com/article.cfm/the_chaos_game

http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/alle18-2.pdf

פרופ' נצה מובשוביץ-הדר

הטכניון, המחלקה להוראת המדעים.
מנהלת את "קשר-חם"- המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי בישראל. בעבר ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע, תכנון וטכנולוגיה.