הנושא: **בעיית ארבעת הצבעים**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר סקירה והסבר על בעיית ארבעת הצבעים, לפיה אפשר לצבוע כל מפה של מדינות קשירות על מישור על על כדור בארבעה צבעים בלבד, כך ששתי מדינות שכנות לא תצבענה באותם צבעים. בסיום מצורף משחק המבוסס על בעיה זו.

מילות מפתח: צביעת מפות, בעיית ארבעת הצבעים, משחקים, היסטוריה של המתמטיקה.

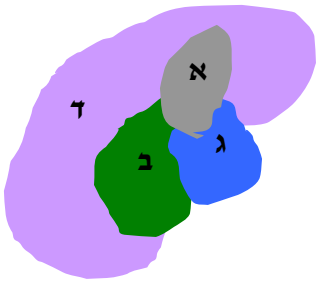
החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 46, תשרי תשל"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

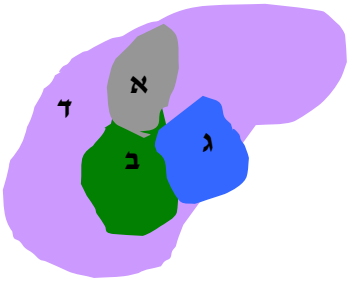
בעיית ארבעת הצבעים

במה בעצם עוסקים המתמטיקאים כיום? אחרי כל כך הרבה שנים של מחקר ופיתוח במתמטיקה האם לא הכל ברור וגלוי? האם לא נפתרו כל הבעיות? שאלות כאלה נשמעות מדי פעם מדי צעירים ומבוגרים.
ובכן אין הדבר כך. להיפך, כאשר מרחיבים את היריעה ומעמיקים את הידע במתמטיקה, מגלים שמספר הבעיות הפתוחות המחכות לפתרונן לא רק שאינו קטן, אלא להיפך, הוא הולך וגדל. כל פיתוח נוסף מעלה בעיות חדשות שפתרונן עדיין מאתנו והלאה.
מדי פעם אומנם קורה שבעיה שהיתה פתוחה הרבה שנים מוצאת את פתרונה. פתרון כזה הוא על פי רוב תוצאה של עמל רב, של מאמץ עצום, שנמשך לפעמים במשך שנים רבות, ומלווה לפעמים באכזבות קשות. מובן שהישג כזה מביא פרסום רב לאלה שמצאו את הפתרון והדי הפרסום מגיעים לפעמים גם לעיתונות היומית. דבר כזה קרה לבעיה שהייתה פתוחה במשך 100 שנים בערך ואשר ידועה בשם: <u>בעיית ארבעת הצבעים</u>.

בעיה זו עסקה בשאלה: <u>האם אפשר לצבוע בארבעה צבעים לכל היותר, כל מפה של מדינות, במישור (או על כדור) כך שאף שתי מדינות שכנות לא ייצבעו באותו צבע</u>?
מדינות נקראות <u>שכנות</u> אם ורק אם יש להן גבול משותף לאורך קטע.
אם הגבול המשותף לשתי מדינות מצטמצם לנקודה, או למספר סופי של נקודות, הן אינן נחשבות לשכנות ומותר לצבוע אותן באותו צבע.
דוגמאות:



כל שתי מדינות הן שכנות



א' ו- ג' אינן שכנות

כבר במאה ה-19 הוכיחו ש<u>חמישה</u> צבעים <u>יספיקו</u> כדי לצבוע לפי התנאים הנ"ל כל מפה שהיא במישור. אבל למרות שניסו במשך כל השנים לצייר מפה אשר לצביעתה יידרשו חמישה צבעים, לא הצליחו בכך. בכל מפה שהציעו התברר שאפשר לצבעה, לפי התנאים, בארבעה צבעים בלבד, למרות שלפעמים נאלצו לשם כך לשנות את סדר הצביעה שהתחילו בו. נציין רק שמדובר במפה של מדינות קשירות, כלומר, שאף אחת מהן <u>אינה</u> מורכבת מחלקים נפרדים שאין ביניהן גבול משותף. (למשל, לא מדובר במדינה כמו ארה"ב, שאלסקה היא חלק ממנה, אף כי כדי להגיע לחלק זה, מוכרחים לעבור או דרך קנדה או דרך הים).

לסיכום: במשך כמאה שנה ידעו שכל מפה של מדינות קשירות במישור (או על כדור) אפשר לצבוע בחמישה צבעים לפי הכללים, אך למרות מאמצים רבים לא הצליחו ליצור מפה שצביעתה תדרוש יותר מארבעה צבעים.
מאידך, לא הצליחו להוכיח שארבעה צבעים יספיקו לצביעת כל מפה שהיא.

בשנת 1976 שני מתמטיקאים אמריקאיים (לפחות אחד מהם יהודי) הצליחו להוכיח כי אמנם ארבעה צבעים יספיקו כדי לצבוע לפי הכללים כל מפה במישור (או על כדור). מעניין שדרך ההוכחה שהשתמשו בה החוקרים דומה לזו שהשתמש בה מתמטיקאי לפי כ- 100 שנה, אשר חשב אז שהוכיח את המשפט, אלא שבהוכחתו התגלתה שגיאה.

כדי להתגבר על שגיאה זו נאלצו החוקרים לבדוק, בעזרת מחשב, כאלפיים מקרים פרטיים.

והנה משחק המבוסס על בעיית ארבעת הצבעים.

משחק זה מיועד לשני משתתפים:

1) ציירו מפה סבוכה ככל שתרצו.
2) הצטיידו כל אחד בעיפרון צבעוני (בצבעים שונים!).
3) כל אחד בתורו צובע את אחת המדינות שבמפה בעיפרון שבידו.

הראשון שייאלץ לצבוע מדינה בצבע זהה לצבע שניתן למדינה שכנה, מפסיד.

התיתכן מפה שבה התוצאה במשחק זה היא תיקו?

האם כדאי לשחק משחק זה:
א) בשלושה שחקנים, כאשר כל אחד משתמש בצבע שונה?
ב) בארבעה שחקנים?