פיתרונות של בחינות בגרות תשמ"ח 3 יח"ל

1. המכנים הם $x + 2$, $2(x - 2)$, $2(x + 2)$.
נכפול ב $2(x - 2)(x + 2)$:

$$(10x - 20)(x - 2) - (x + 2) = 5(x - 2)$$
$$10x^2 - 20x - 20x + 40 - x - 2 = 5x - 10$$
$$10x^2 - 46x + 48 = 0$$
$$5x^2 - 23x + 24 = 0$$

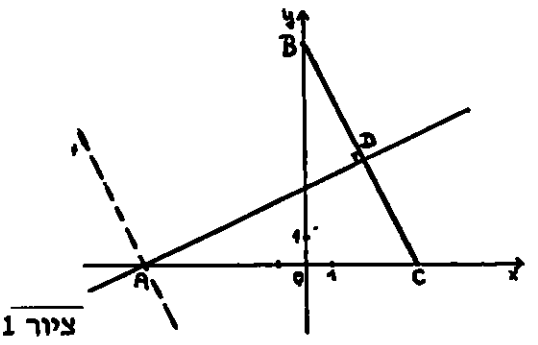
$\Delta = 529 - 480 = 49$, והפתרונות הם $x_2 = 8/5$ ו $x_1 = 3$
קבוצת האמת היא $\{3, 8/5\}$

2. א. שיעורי D הם $D = (2,4)$ כממוצעי שיעורי B ו C (ראה ציור 1).
שיפוע הישר BC הוא $p = -4/8 = -2$
שיפוע הישר המאונך ל CB הוא 1/2.
הישר המבוקש הוא $y - 4 = 0.5(x - 2)$ או $y = x/2 + 3$.

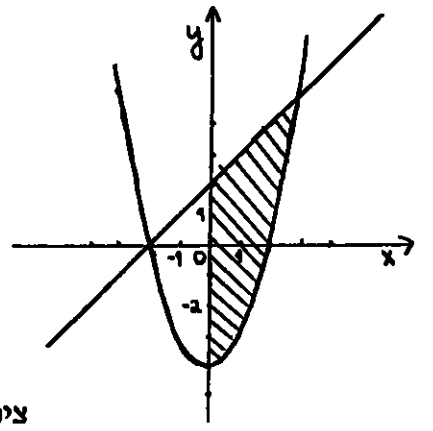
ב. שיעורי הנקודה A מקיימים $y = 0$ והם $A = (-6, 0)$, שיפוע BC הוא 2- לכן, הישר המבוקש הוא $y = -2(x + 6)$ או $y = -10x - 12$.

3. א. ראה ציור 2

ב. האי־שוויון $y \leq x + 2$ מתואר על־ידי חצי־המישור מתחת לישר $y = x + 2$.
האי־שוויון $y \geq x^2 - 4$ מתואר על־ידי החלק מעל לפרבולה $y = x^2 - 4$
האי־שוויון $x \geq 0$ מתואר על־ידי חצי־המישור מימין לציר y. חיתוך התחומים מתואר בציור 2.



ציור 1



ציור 2

4 א. נציב $n = 1$ ונקבל את האיבר הראשון $a_1 = 8$.

נציב $n + 1$ במקום n ונקבל

$$a_{n+1} = (n + 1)^2 + 7$$
$$a_{n+1} = n^2 + 2n + 8$$

נחסר את הנוסחה הנתונה.

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 8 - (n^2 + 7)$$

או

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

ב. נמצא n המקיים $a_{n+1} - a_n = 17$

$$2n + 1 = 17$$
$$n = 8$$

5 א.

$$f(a) = e^{2a} - e^{-2a}$$
$$f(-a) = e^{-2a} - e^{2a} = -f(a)$$

לכן הפונקציה f אי־זוגית.

ב.

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$$
$$f'(0) = 2e^0 + 2e^0 = 4$$

6. א.

$$y' = 3x^2 + 3a$$

נקודת קיצון, אם קיימת, צריכה לקיים $3x^2 + 3a = 0$

או

$$x^2 = -a$$

ואין פיתרון למשוואה זו כאשר $a > 0$.

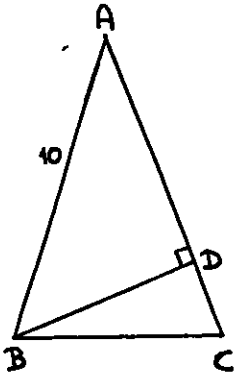
ב. אם $a = 0$ הפיתרון היחיד של המשוואה $f'(x) = 0$ הוא $x = 0$

הנגזרת חיובית משני צידי $x = 0$ לכן אין זו נקודת קיצון.

7. א. יהי BD הגובה לשוק. ראה ציור 3

במשולש ABD

$$BD = 10\sin\alpha$$



ציור 3

ב. שטח המשולש הוא

$$S = \tfrac{1}{2}BD \times AC = \tfrac{1}{2} \times 10\sin\alpha \times 10$$
$$S = 50\sin\alpha$$

ג הערך הגדול ביותר של $\sin\alpha$ הוא 1 (כאשר $\alpha = 90°$).

8. $f(x) = x + 2\cos x$

$f'(x) = 1 - 2\sin x$

$1 - 2\sin x = 0 \quad \rightarrow \quad \sin x = 1/2$

$x = \pi/6$ בתחום $[0,\pi/2]$

נבנה טבלת ערכים של f ונכלול את שני הקצוות 0 ו $\pi/2$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$
f(x)	2	2.26	1.57

$x = \pi/6$ היא נקודת מקסימום מוחלט. המקסימום הוא $(\pi/6 + \sqrt{3})$ 2.26 בקירוב.

$x = \pi/2$ היא נקודת מינימום מוחלט המינימום הוא $(\pi/2)$ 1.57 בקירוב.

9. $\cos \sphericalangle DBC = 8/9 \rightarrow \sphericalangle DBC = 27.27° \rightarrow \sphericalangle ABC = 54.54°$

$AC/8 = \tan 54.54°$

$AC = 11.23$ סמ'

10 נקודות חיתוך הגרפים מקיימות $(x - 2)^2 = -x + 4$

$x^2 - 3x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ או $x = 3$

השטח נתון על-ידי האינטגרל המסויים

$$\int_0^3 (-x + 4 - x^2 + 4x - 4)dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = [-x^3/3 + 3x^2/2]_0^3$$

$$S = -27/3 + 27/2 = (-54 + 81)/6 = 27/6 = 9/2$$

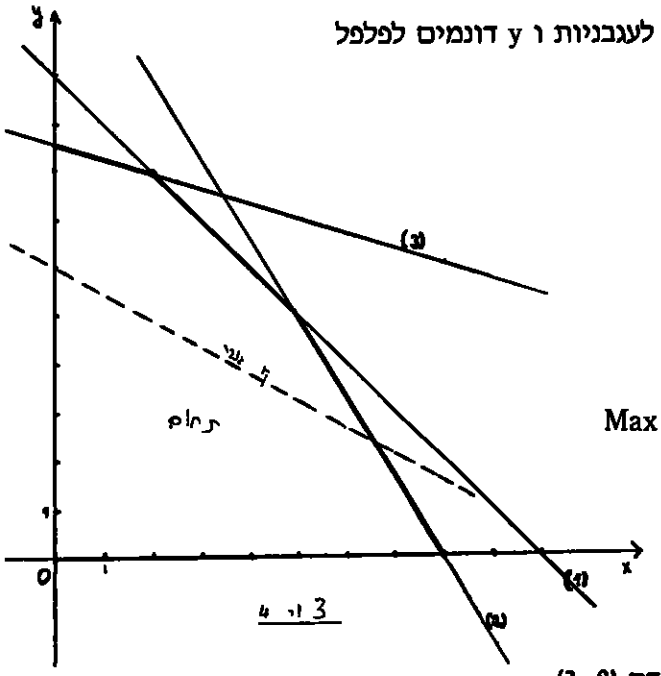
השטח שווה ל 4.5 יי"ר.

11. נניח שהחקלאי מתכנן x דונמים לעגבניות ו y דונמים לפלפל

א האילוצים הם

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \quad (1) \\ 350x + 210y \leq 2800 \quad (2) \\ 14x + 42y \leq 364 \quad (3) \end{cases}$$

פונקצית המטרה היא $\text{Max}\,[800x + 1400y]$



ציור 4

ב התחום האפשרי מתואר בציור 4

קו הגובה הקיצוני עובר דרך הנקודה (8, 2),

פיתרון המערכת $\begin{cases} x + y = 10 \\ 14x + 42y = 364 \end{cases}$

לכן, על החקלאי לגדל 2 דונמים עגבניות ו־8 דונמים פלפל כדי שרווחיו יהיו מקסימליים.

ג. הרווח המקסימלי הוא

$$800\times 2 + 1400\times 8 = 12{,}800 \text{ שקל}$$

ד. במקרה זה *כמות המים לא תנוצל עד תומה* כי אי־שוויון

$$350x + 210y \leq 2800$$

מתקיים באופן חזק ($<$ במקום $\leq$) ואמנם

$$350\times 2 + 210\times 8 = 2380 < 2800$$

12 א. הרדיוס R של המעגל מקיים $R^2 = 9 + 16 = 25$

לכן משוואת המעגל היא

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

ב. על ציר x מתקיים $y = 0$, לכן

$$(x + 3)^2 + 16 = 25$$

$$(x + 3)^2 = 9$$

$$x + 3 = \pm 3 \Rightarrow x = -6 \text{ או } x = 0$$

לכן $A = (-6,0)$

על ציר y קיים $x = 0$, לכן

$$9 + (y - 4)^2 = 25$$

$$(y - 4)^2 = 16$$

$$y - 4 = \pm 4 \rightarrow y = 8 \text{ או } y = 0$$

לכן $B = (0,8)$

ג הנקודה $M = (-3,4)$ היא אמצע הקטע AB, כי שיעוריה הם ממוצעי שיעורי A ו B

לכן, שלוש הנקודות A, B ו M נמצאות על ישר אחד.

13 $$f(x) = x^2/(2 + x)$$

א לפונקציה f יש נקודת אי־הגדרה אחת $x = -2$ (כאשר המכנה מתאפס)

ב. $$f'(x) = (4x + 2x^2 - x^2)/(2 + x)^2 = (4x + x^2)/(2 + x)^2$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 0$ או $x = -4$

נבנה טבלת השתנות של f

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
סימן f′	+	0	-		-	0	+
f	↗	∩	↘		↘	∪	↗

$x = 0$ היא נקודת מינימום. $x = -4$ היא נקודת מקסימום.

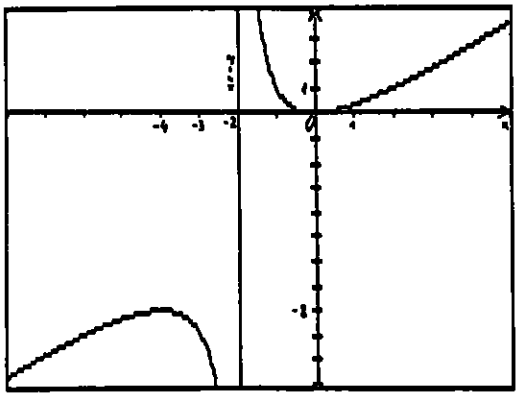
ג מן הטבלה מסיקים

תחום עליה $x < -4$ או $x > 0$.

תחום ירידה: $0 > x > -2$ או $-2 > x > -4$.

ד. בסביבת הנקודה $x = -2$ הפונקציה שואפת ל∞- מצד שמאל של 2- ושואפת ל∞ מצד ימין של 2-.

ה הגרף מתואר בציור 5.



$$f(x) = \frac{x^2}{2+x}$$

14 נסמן ב x דצמ' את הבסיס של התיבה $(x > 0)$

הגובה של התיבה הוא $108/x^2$ סמ'.

שטח הפח f(x) הדרוש לבניית התיבה מורכב מארבעה מלבנים שווים $4x \times 108/x^2$ והבסיס x^2

$$f(x) = 432/x + x^2$$

נמצא את המינימום המוחלט של f

$$f'(x) = -432/x^2 + 2x$$

עלינו לפתור את המשוואה

$$-432/x^2 + 2x = 0$$

$$x^3 = 216$$

$$x = 6$$

הנגזרת חיובית מימין ל 6, כי $f'(7) = -432/49 + 14 = 5.18 > 0$

הנגזרת שלילית משמאל ל 6, כי $f'(1) = -432/1 + 2 < 0$.

לכן $x = 6$ היא נקודת מינימום, ומכיוון שהיא יחידה, המינימום הוא מוחלט.

כדי ששטח הפח יהיה מינימלי יש לבחור צלע בסיס בת 6 דצמ'

15. הישר $y = 1$ משיק לגרף $y = \cos x$ בנקודה $x = 0$, ולגרף $y = \sin x$ בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$

שני הגרפים נפגשים בנקודה $x = \frac{\pi}{4}$ המתקבלת מהשוויון $\sin x = \cos x$

הגרף $y = \sin x$ חותך את ציר ה x בנקודות $x = 0$ ו $x = \pi$.

הגרף $y = \cos x$ חותך את ציר ה x בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$

ג. $S_1 = \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/4} + [\sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} =$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} = 0.586$$

ד. $S_2 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx - \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x\,dx = [x]_0^{\pi/2} - [\sin x]_0^{\pi/4} - [-\cos x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} = 0.157$$