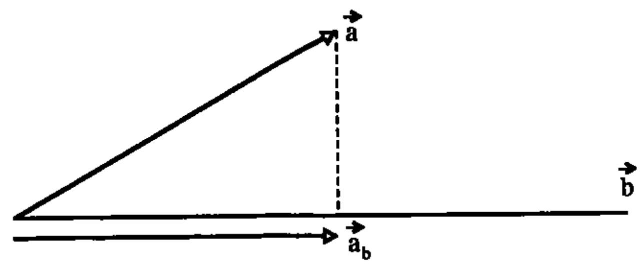
# המכפלה הסקלרית

גיורא מן

ברשימה זו נראה כיצד "נולדה" המכפלה הסקלרית באופן טבעי משיקולים גיאומטריים, ואיך אפשר לגזור ממנה את משפט הקוסינוס מחד גיסא ואת הנוסחה הפשוטה לחישובה האנליטי מאידך גיסא.




בהינתן שני וקטורים $\vec{a}$ ו־$\vec{b}$ טבעי להגדיר שני וקטורים חדשים $\vec{a}_b$ — ההיטל של $\vec{a}$ בכיוון $\vec{b}$, ו־$\vec{b}_a$ — ההיטל של $\vec{b}$ בכיוון $\vec{a}$ יש מספר מקרים מעניינים

א $\vec{a}_a = \vec{a}$

ב אם $\vec{a} \perp \vec{b}$ אז $\vec{a}_a = \vec{0}$

ג אם $\vec{a} = s\,\vec{b}$ כאשר $s$ סקלר לא שלילי אז $\vec{a}_b = \vec{a}$
אם $s < 0$ אז $\vec{a}_b = -\,\vec{a}$

ד אם $\vec{a} = \vec{b}$ אז $a_b = b_a$ [1]

ה בדרך כלל $a_b \neq b_a$, אבל תמיד $a \; b_a = a_b \; b$ ואמנם, בגלל דמיון משולשים ישרי זווית השווים בזווית חדה שלהם

$$\frac{b_a}{b} = \frac{a_b}{a} \Rightarrow a \; b_a = a_b \; b$$

ו ההיטל של סכום וקטורים הוא סכום היטליהם, כלומר

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c$$

תוצאה ה מובילה להגדרה הבאה **המכפלה הסקלרית של שני וקטורים היא מכפלת אורכו של אחד מהם באורך היטלו של השני בכיוון הראשון.** או בסמלים $\vec{a} \; \vec{b} = a_b \; b = a \; b_a$ מן ההגדרה האחרונה ומן התוצאות א-ו למעלה נובע

א $\vec{a} \; \vec{a} = a \; a$, ולכן נכתוב בקיצור $\vec{a}^2 = a^2$

ב אם $\vec{a} \perp \vec{b}$ אז $\vec{a} \; \vec{b} = 0$.

ג אם $\vec{a} = s\,\vec{b}$ כאשר $s$ סקלר לא שלילי אז $\vec{a} \; \vec{b} = a \; b$.
אם $s < 0$ אז $\vec{a} \; \vec{b} = -a \; b$

ד חוק הפילוג $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \; \vec{c} = \vec{a} \; \vec{c} + \vec{b} \; \vec{c}$

על בסיס התוצאות א ו־ד אפשר לקבל ביטוי נוסף למכפלה הסקלרית של שני וקטורים לשם כך נתבונן בציור שבו רואים משולש הנוצר על־ידי שני הווקטורים והפרשם לפי חוק הפילוג מקבלים $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,\vec{a} \; \vec{b}$ אם נסמן $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ נקבל במקום המשוואה האחרונה $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,\vec{a} \; \vec{b}$ לכן, בסיכום

$$\vec{a} \; \vec{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

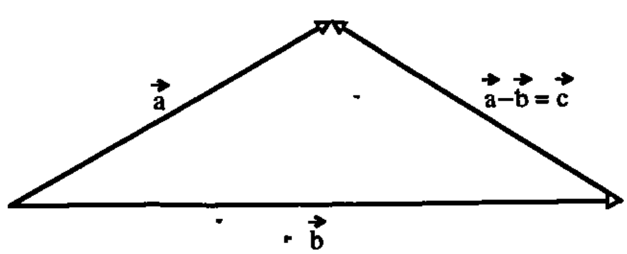
למשל, אם $a = 4$, $b = 7$ ו־$c = 5$ יוצא ש

$$\vec{a} \; \vec{b} = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2} = 20$$

מן ההגדרה נובע שהמכפלה הסקלרית של שני וקטורים היא פונקציה של שלושה משתנים אורכי שני הווקטורים והזווית שביניהם ליתר דיוק $\vec{a} \; \vec{b} = a \; b \; \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ גם הפעם קל לראות איך נובעות התוצאות א-ג למעלה מן ההגדרה האחרונה נוסף על כך אפשר להגיע לתוצאות אחרות המתבססות על תכונות הקוסינוס למשל,

א

$$\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60° \Rightarrow \vec{a} \; \vec{b} = \frac{a \; b}{2}$$




ב $-ab \leq \vec{a} \; \vec{b} \leq ab$

ג אם הזווית בין שני וקטורים קהה אז המכפלה הסקלרית של שני הווקטורים שלילית

וכו'

---

[1] חשוב להדגיש ש־$a_b$ אינו סתם האורך של $\vec{a}_b$ $a_b$ הוא האורך של $\vec{a}_b$ בכיוון $\vec{b}$ לכן, במקרה של זווית קהה בין שני הוקטורים $a_b < 0$ וגם $a_b < 0$

הצירוף של שתי התוצאות

$$\vec{a}\ \vec{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

$$\vec{a}\ \vec{b} = a\ \ b\ \ \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

מביא למשפט הידוע בשם **משפט הקוסינוס**:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

משפט הקוסינוס מאפשר חישוב זוויותיו של משולש אם מכירים את כל צלעותיו כך, למשל, במקרה של המשולש שבו $a = 4$, $b = 7$ ו־$c = 5$ נקבל

$$\cos(a,b) = \frac{4^2+7^2-5^2}{2\ \ 4\ \ 7} = \frac{5}{7}$$

וביטויים דומים עבור שתי הזוויות הנותרות הנוסחה

$$\vec{a}\ \vec{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

מאפשרת ניסוח קומפקטי יותר של **משפט הקוסינוס**:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\ \vec{b}}{ab}$$

לבסוף, נראה ביטוי אנליטי פשוט למכפלה הסקלרית כאשר $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ו־$\vec{b} = (b_1, b_2)$ אם נציב בשוויון שקיבלנו קודם

$$\vec{a}\ \vec{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

מן התוצאות הבאות

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$c^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2$$

נקבל אחרי פתיחת סוגריים, כינוס וצמצום את התוצאה

$$\vec{a}\ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$