************ שיטות חדשות, תכנים חדשים *****

מסביב לטוריצ'לי (חלק א)

מאת: דוד קטורזה, האוניברסיטה העברית

במאמר זה נציג בעיה גיאומטרית מעניינת שמשכה בזמנו את תשומת לבו של Evangelista Torricelli (1608-1647), פיסיקאי וגיאומטר איטלקי, תלמידו של גלילאו. טוריצ'ילי קיבל את הבעיה מהמתמטיקאי הצרפתי P. de Fermat, (1601-1665), ופתר אותה בדרכים רבות. אחת מהן, המובאת להלן, מסתמכת על תכונת משולש שווה-צלעות (משפט Viviani). ההוכחות המסומנות ב (*) לקוחות מהספר:

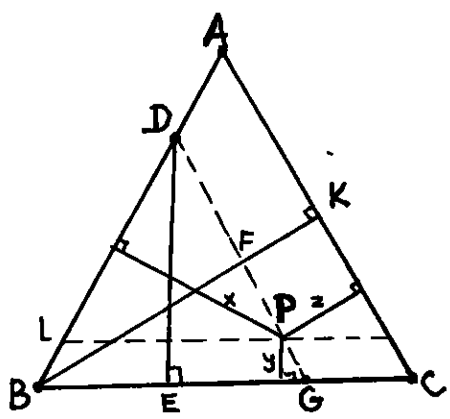
H. Dorrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, 1965

ב ע י ה: מצא, בתוך משולש נתון ABC, נקודה P כך שסכום המרחקים מ P לשלושת הקדקודים מינימלי.

Min (PA + PB + PC)

אחד הפתרונות של בעיה זו מתבסס על תכונת משולש שווה צלעות:

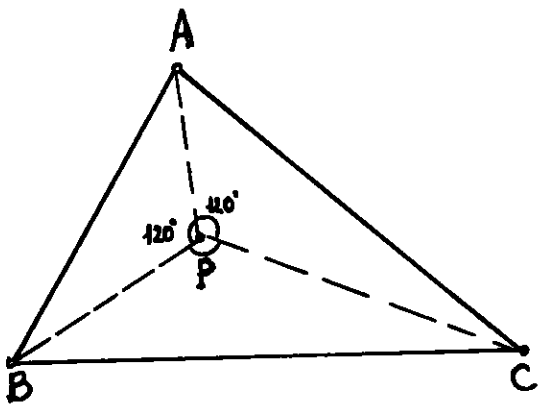
מ ש פ ט: אם P נקודה בתוך משולש שווה-צלעות, אז סכום המרחקים של P אל שלוש הצלעות הוא קבוע ושווה לאורך גובה המשולש.



שרטוט 1

הוכחה: נתבונן בשרטוט 1.
במשולש שווה-הצלעות ABC בונים
מקבילים לצלעות דרך P. המשולשים DBG ו DPL
אף הם שווי-צלעות. הגובה BK מורכב מ BF
(השווה ל DE המורכב מ x + y) ומ FK השווה ל z.

המשפט הזה נשאר נכון גם אם הנקודה P נמצאת
מחוץ למשולש ABC, בתנאי שנחשיב את המרחק
לצלע כשלילי אם P והקדקוד הנגדי נמצאים
משני צדי הצלע.

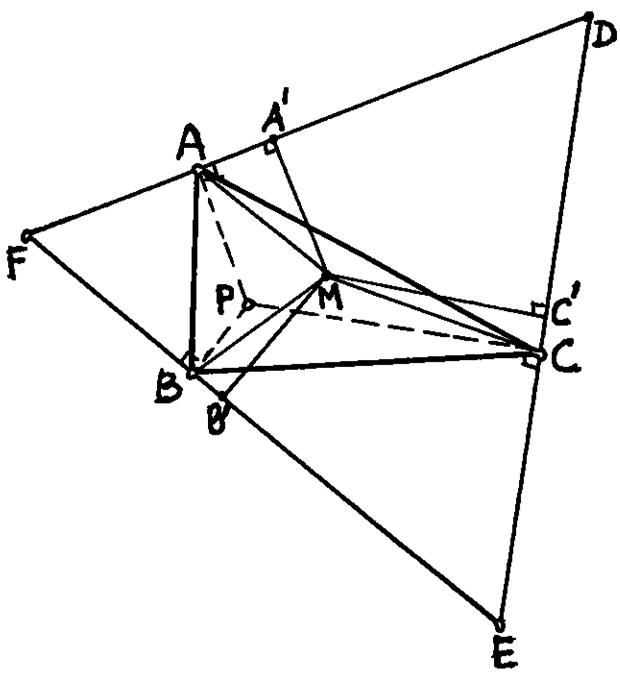


שרטוט 2

פ ש פ ט ט ו ר י צ י ל י:
פתרון הבעיה הוא בנקודה P שממנה רואים כל
צלע של המשולש בזווית שווה של 120° (ראה
שרטוט 2; אם יש במשולש זווית בת לפחות 120°,
הפיתרון הוא בקדקוד שלה).

הערה: אפשר לבנות את הנקודה על-ידי
בניית קשת של 120° סביב AB וסביב AC.

הוכחת משפט טורצ'ילי: תהי P הנקודה
שממנה רואים את שלוש הצלעות של המשולש ABC
באותה זווית של 120° (שרטוט 3). דרך
הקדקודים A, B ו C נבנה ישרים מאונכים
ל AP, BP ו PC בהתאמה. המשולש FED
הוא שווה-צלעות. ($\measuredangle F + \measuredangle P = 180°$ וכו').
לכן, על פי ההערה הקודמת, הסכום
PA + PB + PC שווה לגובה
משולש שווה-הצלעות FED.

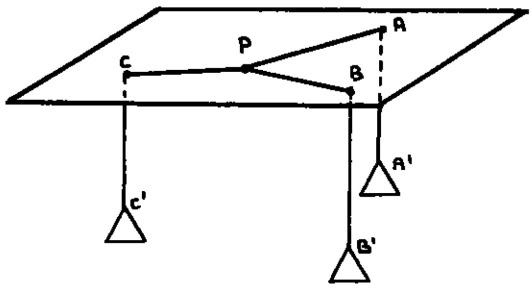


שרטוט 3

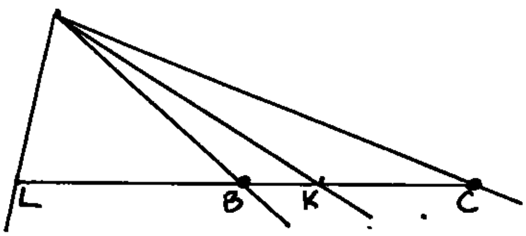
תהי M נקודה שונה מ P בתוך המשולש ABC;
נוכיח כי הסכום MA + MB + MC גדול מן
הסכום PA + PB + PC. נוריד מ M אנכים
MA', MB' ו MC' לשלוש הצלעות של המשולש FED.

נוצרים המשולשים ישרי-הזווית 'MAA', MBB
ו 'MCC, שבהם היתר גדול מן הניצב
(למשל 'MA > MA). לכן
.MA+MB+MC > MA'+MB'+MC' = PC+PB+PA

הוכחה אחרת של טענת טוריצ'לי מתבססת על החוק הפיסיקלי הטוען, כי מערכת מגיעה לשווי משקל יציב כאשר האנרגיה הפוטנציאלית שלה מינימלית.



שרטוט 4



שרטוט 5

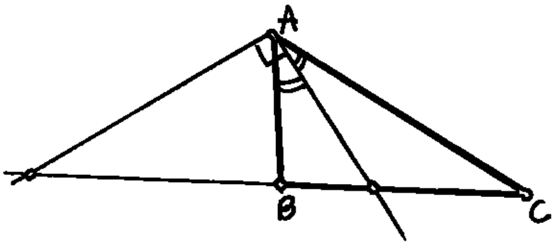
אם נקשור שלושה חוטים בנקודה P, נעבירם דרך שלושה חורים שנוקבו בשולחן אופקי ונקשור שלוש משקלות שוות בקצות החוטים, הרי המערכת תתייצב בנקודה P שממנה רואים את הצלעות באותה זווית של $120°$ (כפי שמתייצבים שלושה כוחות שווים בעלי שקול 0). מצב זה מתואר בשרטוט 4.
מאידך, האנרגיה הפוטנציאלית תהיה מינימלית כאשר הסכום 'AA' + BB' + CC, מקסימלי, כלומר כאשר המשקלות תימצאנה במצבם הנמוך ביותר. אם ℓ_1, ℓ_2 ו ℓ_3 מסמנים את אורכי החוטים, אז

$$AA' + BB' + CC' = \ell_1 - PA + \ell_2 - PB + \ell_3 - PC = \ell_1+\ell_2+\ell_3 - (PA+ Pb+PC)$$

ומכיוון שהסכום $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ קבוע, הסכום PA + PB + PC חייב להיות מינימלי.

לפני שנמשיך נזכיר תוצאות אחדות על חלוקה הרמונית שלהן נזדקק בהמשך(1).

הגדרה: ארבע נקודות (LBKC) על קו ישר מהוות חלוקה הרמונית אם LB/LC = -KB/KC (או היחס הכפול של 4 הנקודות שווה 1-). (ראה שרטוט 5).
אם מחברים נקודה מחוץ לישר לארבע הנקודות של חלוקה הרמונית, מתקבלת אלומה הרמונית.

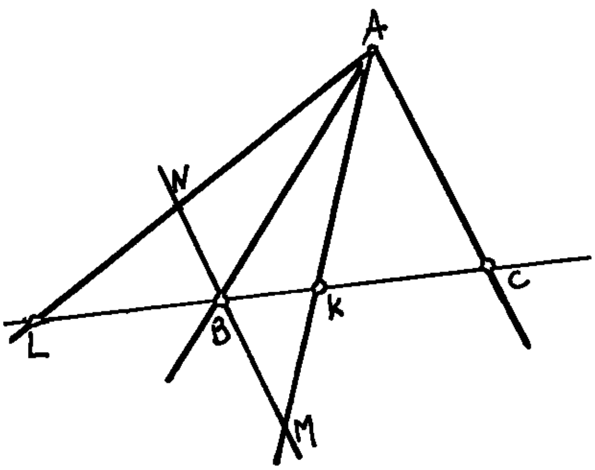


שרטוט 6

משפט 1: חוצי-זווית פנימית וחיצונית במשולש קובעים חלוקה הרמונית על הצלע הנגדית (משפט חוצה-הזווית). (ראה שרטוט 6).

משפט 2: כל ישר חותך אלומה הרמונית לפי חלוקה הרמונית (היחס הכפול הוא שמורה של ההטלה המרכזית).

משפט 3: שלוש קרניים של אלומה הרמונית מקצות על ישר מקביל לקרן הרביעית קטע ואמצעו, ולהיפך.



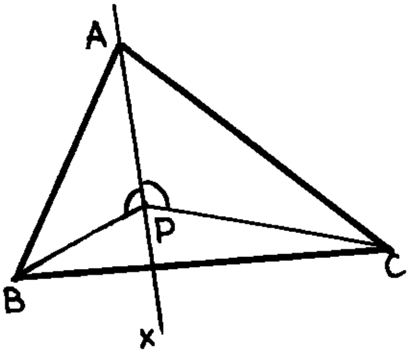
שרטוט 7

הוכחה: נתבונן בשרטוט 7. אם MN||AC דרך B, אז מדמיון משולשים ומהחלוקה ההרמונית מקבלים:
BM/AC = KB/KC = LB/LC = BN/AC → BM = BN.

---

(1) ראה פאול כץ, על היחס ההרמוני ועל היחס הכפול, על"ה 2, 30-23.

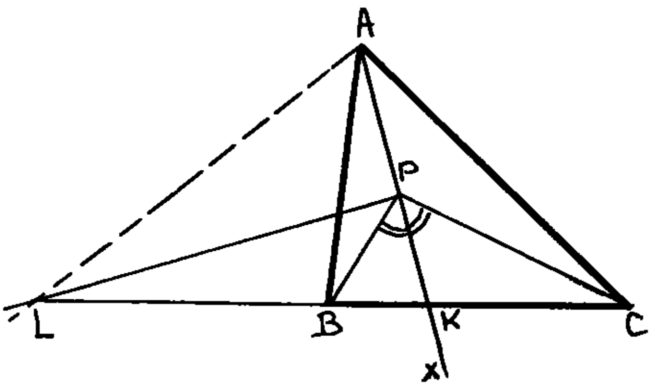
בחיפוש אחר הפיתרון בשלבים לבעית טוריצ'ילי, תחילה על ישר דרך A, אחר כך במרחק קבוע מ A, התפתחה הבעיה הזאת בכמה כיוונים מעניינים.



שרטוט 8

<u>ב ע י ה א:</u> בתוך משולש ABC נתון ישר Ax.
בנה על הישר Ax נקודה P שממנה רואים את שני הקטעים AB ו AC באותה זווית, כלומר, כך ש $\measuredangle APB = \measuredangle CPA$. (שרטוט 8).

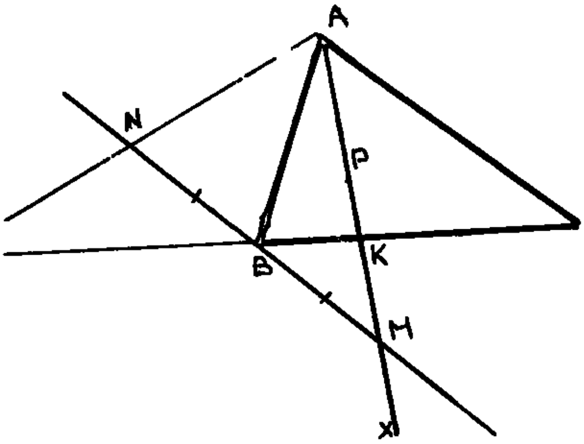
ח ק י ר ת ה צ ו ר ה: נתבונן בשרטוט 9. P מקיימת את הדרישות הנ"ל אם ורק אם PK הוא חוצה-זווית במשולש BPC. אם PL הוא חוצה-הזווית החיצונית ל $\measuredangle BPC$, אז החלוקה (LBKC) היא הרמונית, האלומה (P,LBKC) היא הרמונית וכן גם האלומה (A, LBKC).
בנוסף לכך, הזווית $\measuredangle LPK$ היא ישרה.



שרטוט 9

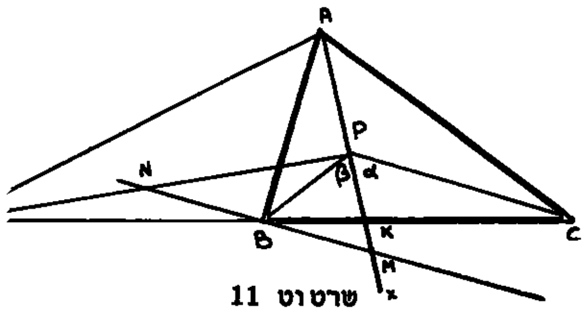
ב נ י י ת ה נ ק ו ד ה P (שרטוט 10):
בונים תחילה את הקרן הרביעית AL של החלוקה הרמונית. מעבירים דרך B מקביל ל AC החותך את Ax ב M. מקצים BN=BM ו AN חותך את BC בנקודה הרביעית L (משפט 3).

עתה, מעגל בקוטר LK (K נקודת חיתוך של חוצה זווית A עם BC) חותך את Ax בנקודה P המבוקשת. נוכיח זאת.



שרטוט 10

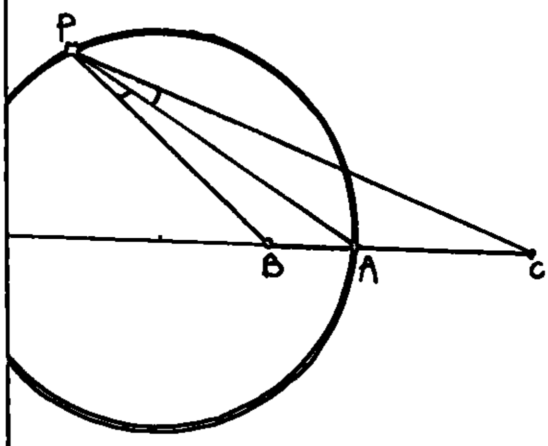
מספיק להראות, כי $\alpha = \beta$ (ראה שרטוט 11).
נעביר דרך B מקביל ל PC החותך את PK
ב M ואת PL ב N. (P,LBKC) חלוקה הרמונית,
לכן $NB = BM$ (משפט 3). מכאן: PB הוא
תיכון במשולש NMP; ומכיוון ש $\measuredangle NPM = 90^\circ$
(היקפית נשענת על קוטר), מתקיים: $PB = BM$.
מכאן: $\measuredangle BMP = \beta$ (זוויות בסיס במשולש שווה-
שוקיים PBM), כמו כן $\alpha = \measuredangle BMP$ (זוויות
מתחלפות ליד מקבילים). בכך הוכחנו את
השוויון המבוקש: $\beta = \measuredangle BMP = \alpha$.



שרטוט 11

הערות:

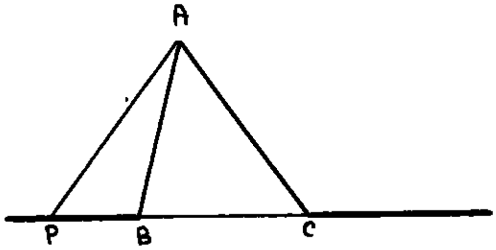
1. הזוויות $\measuredangle APB$ ו $\measuredangle APC$ שבשרטוט 10 שוות בגודלן, אך שונות בכיוון. לכן אלה זוויות נגדיות: $\measuredangle APB = -\measuredangle APC$.
   כדי לקבל זוויות שוות, יש לדבר על הזוויות $\measuredangle APB$ ו $\measuredangle CPA$, ואז אמנם
   $\measuredangle APB = \measuredangle CPA$
2. אם הישר הנתון Ax הוא תיכון במשולש ABC (שאינו שווה-שוקיים), הנקודה P אינה קיימת (נמצאת באין-סוף); לעומת זאת, אם Ax הוא תיכון במשולש שווה-שוקיים ABC, כל נקודה שעליו מתאימה.
3. אם הישר Ax מאונך ל BC, נקודת החיתוך H עם BC עונה לשאלה.
4. אם הנקודה P נמצאת באחד מקצות הקטעים A, B ו C, אז זווית הראיה אינה מוגדרת.



שרטוט 12

<u>ב ע י ה ב:</u> נתונות שלוש נקודות B,A ו C. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמהן רואים את שתי הצלעות AC ו AB באותה זווית.

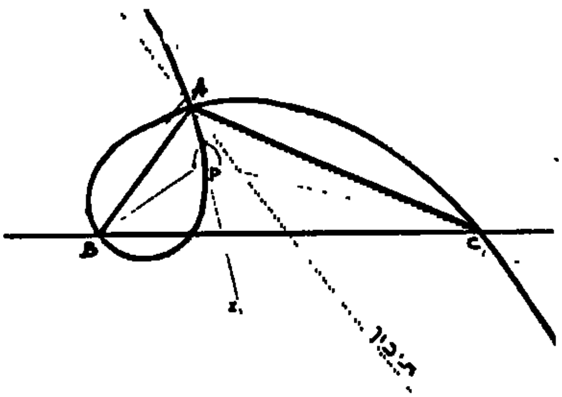
מ ק ר ה 1 (שרטוט 12): אם שני הקטעים AB ו AC נמצאים על ישר אחד, המקום הגיאומטרי הוא מעגל אפולוניוס או האנך האמצעי של הקטע (כששני הקטעים שווים).



שרטוט 13

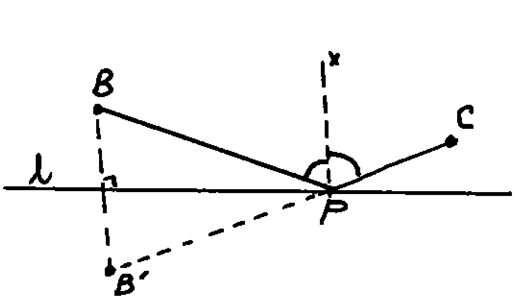
מ ק ר ה 2 (שרטוט 13): נניח עתה כי A, B ו C אינן על ישר אחד. בשביל הנקודות שמחוץ לזווית BAC, שתי הקרניים שעל הישר BC (חוץ מהקטע BC) נראות כעונות לשאלה. אך יש לשים לב, שמנקודה P על קרן כזאת רואים את הקטעים AB ו CA בזוויות נגדיות, כי $\measuredangle CPA = -\measuredangle APB$. לכן קרניים אלו אינן חלק מן המקום הגיאומטרי.

בשביל הנקודות שבתוך הזווית BAC, על כל ישר Ax היוצא מ A אנו יודעים לבנות נקודה כזאת. אם הישר Ax חיצוני למשולש ABC הבנייה דומה לקודמת, אך במקרה זה אנו עוסקים בחוצה הזווית החיצונית במשולש BPC בקדקוד P. המקום הגיאומטרי אינו קו פשוט. הנה ציור (שרטוט 14) שהתקבל בעזרת מחשב על-ידי בניית משוואות פרמטריות לשיעורי הנקודה P.



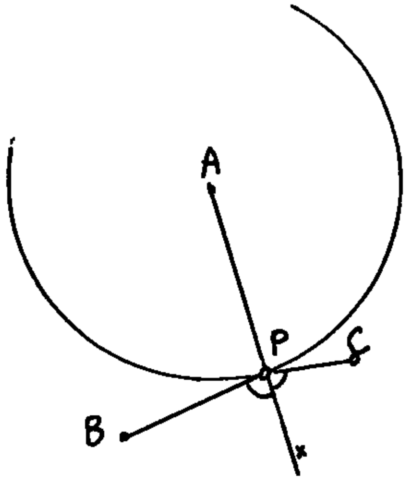
שרטוט 14

ידועה הבעיה האלמנטרית של מציאת נקודה P על ישר ℓ נתון כך שהסכום BP + PC מינימלי (B ו C נקודות נתונות מחוץ לישר באותו צד). הפיתרון (ראה שרטוט 15) מתקבל בחיתוך הישר ℓ עם B'C, כאשר B' היא הנקודה הסימטרית של B ביחס לישר ℓ ומחייב שוויון הזוויות $\measuredangle xPC = \measuredangle BPx$ (זוויות הנפילה וההחזרה כשמדובר בקרן אור).



שרטוט 15

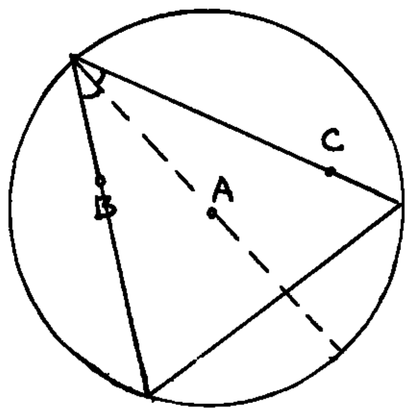
מה קורה אם נחליף את הישר במעגל?
הבעיה השלישית עוסקת במקרה זה.



שרטוט 16

<u>ב ע י ה ג:</u> נתונים מעגל שמרכזו A ושתי נקודות B ו C חיצוניות לו (ראה שרטוט 16). מצא על המעגל נקודה P כך שהסכום BP + PC מינימלי. (הישר BC חייב להיות חיצוני למעגל).

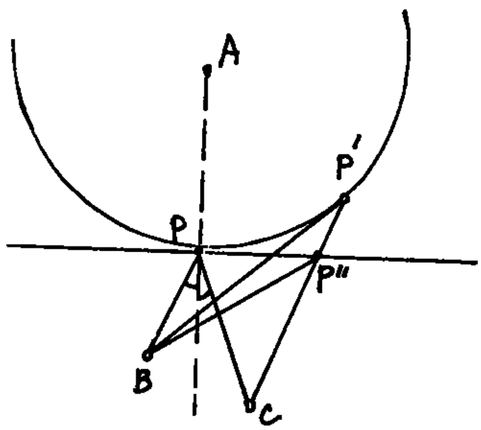
לבעיה הזאת ניסוחים נוספים כאשר הנקודות B ו C נמצאות בתוך המעגל:



שרטוט 17

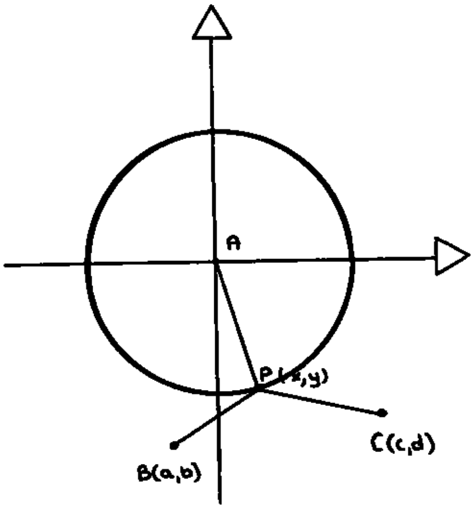
1. בנה משולש שווה-שוקיים החסום במעגל וכך ששוקיו תעבורנה דרך הנקודות B ו C (ראה שרטוט 17).

2. איך לדחוף כדור ביליארד בשולחן ביליארד עגול כך שיפגע בכדור שני אחרי חזרתו מן השפה (בעית הביליארד של Alhazen, מתמטיקאי ערבי, 956-1039, שניסח אותה בספרו Optics).



שרטוט 18

בעיה ג מתקשרת לבעית טוריצ'ילי בכך שאם במשולש ABC הנקודה P נמצאת במרחק נתון מהקדקוד A (כלומר על מעגל סביב A) איך לבחור אותה כך שהסכום BP + PC יהיה מינימלי?



שרטוט 19

גם במקרה זה הפיתרון מתקבל כאשר הזוויות $\measuredangle BPx$ ו $\measuredangle CPx$ שוות (כדרכה של קרן אור הנופלת על מראה קמורה - ראה שרטוט 16). כאן הנורמל Px הוא הרדיוס. ואמנם, אם הזוויות $\measuredangle BPx$ ו CPx, ו P' היא נקודה אחרת על המעגל (ראה שרטוט 18), אזי

$$BP' + P'C > BP'' + P''C > BP + PC$$

הפיתרון מתקבל כחיתוך של היפרבולה עם המעגל.

הוכחה*: נבחר מערכת צירים שראשיתה במרכז A של המעגל בעל רדיוס R ונסמן $B = (a,b)$, $C = (c,d)$. תהי $P = (x,y)$ נקודה על המעגל (ראה שרטוט 19). שיפועי הישרים PB, PA ו PC הם בהתאמה:

$$\frac{y-x}{x-c}, \frac{y}{x}, \frac{y-b}{x-a}$$

P מקיימת את הדרישות רק בתנאי, ש PA חוצה את הזווית $\measuredangle BPC$, כלומר $tg\,\measuredangle BPA = tg\,\measuredangle APC$

$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{y-d}{x-c}}{1 + \frac{y}{x} \bullet \frac{y-d}{x-c}} = \frac{\frac{y-b}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \bullet \frac{y-a}{x-a}}$$

אחרי פישוט וניצול $x^2 + y^2 = R^2$:

$$\frac{dx - cy}{R^2 - cx - dy} = \frac{ay - bx}{R^2 - ax - by}$$

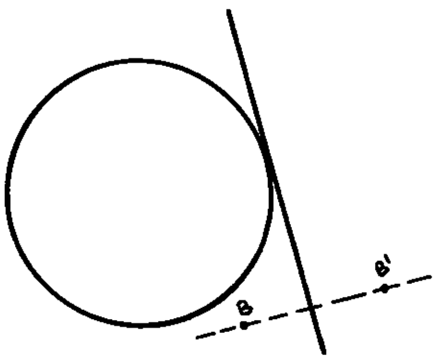
$$(R^2 - ax - cy)(dx - cy) = (R^2 - cx - dy)(ay - bx)$$

$$0 = x^2(Bc+ad) - y^2(bc+ad) - xy({}^2ac-{}^2bd) + R^2(-bx-dx+ay+cy)$$

אם נסמן לשם קיצור: $b+d = \delta$, $a+c = \gamma$, $ac-bd = \beta$, $bc+ad = \alpha$, מתקבל

$$\alpha(x^2 - y^2) - 2\beta xy - R^2\delta x + R^2\gamma y = 0$$

זוהי משוואת היפרבולה.
לכן הנקודה המבוקשת נמצאת בחיתוך
ההיפרבולה עם המעגל הנתון.



שרטוט 20

<u>ב ע י ה ד:</u> נתונים מעגל ונקודה B.
מהו המקום הגיאומטרי של 'B סימטרית של
B ביחס למשיק כאשר המשיק משתנה על המעגל?
על כך בחוברת על"ה הבאה.

ההמשך בגיליון הבא.