**************** מתלבטים ****************

מספרים רציונליים, אי-רציונליים, מחשבון וההצגה העשרונית

מאת: דוד קטורזה, האוניברסיטה העברית

מאמר זה דן בנושא שאין בו אחדות דעות, לא אצל התלמידים ולא אצל המורים; ומשרד החינוך לא פירסם הוראות ברורות בנידון.
תחילה נצביע על הבעיה, נברר את המצב השורר היום בכיתה, ולבסוף נציע דרך אפשרית לצאת מאי-ההבהירות. נשמח לעורר עניין וויכוח אצל המורים, ואולי כך לעודד את משרד החינוך להחליט בנושא זה.

1. הבעיה

א. מספרים רציונליים

כאשר תלמיד פותר את המשוואה

$3x = 10$

האם עליו לכתוב כפיתרון

$x = 10/3$ או $x = 3.33$ או $x = 3.33...$?

או אולי את שלוש התשובות?

האם התשובה 3.33 שגוייה? האם יש לתת את מלוא הנקודות לתשובה זו?

האם רצוי לעבור לשבר מעורב $3 + 1/3$?

האם התשובה $x = 3.33...$ נכונה?

האם עלינו לבקש מהתלמיד: פתור בקירוב 0.01 את המשוואה הנ"ל?

המצב שונה במקרה של משוואה כגון $2x = 5$, כי ההצגה העשרונית 0.4 מדוייקת, ושתי התשובות 2/5 ו 0.4 שקולות ונכונות.

ב. מספרים אי-רציונליים אלגבריים

(מספר נקרא אלגברי אם הוא פיתרון של משוואה פולינומיאלית עם מקדמים רציונליים, על כן $\sqrt{2}$ או $\sqrt[4]{6}$ הם מספרים רציונליים אלגבריים).

האם קבוצת האמת של המשוואה $x^2 = 3$ צריכה להכתב $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, או אולי $\{-1.732, 1.732\}$?

אותה שאלה עולה גם במשוואות מסובכות יותר, ובהן יש נטייה להעדיף את התשובה העשרונית על הביטוי האי-רציונלי הארוך, כמו במשוואה $x^2 - x - 1 = 0$ בעלת קבוצת אמת $\{(1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2\}$, או בהצגה עשרונית $\{-0.618, 1.618\}$. ברור מהו הקושי בעיסוק במספר האי-רציונלי $(1 + \sqrt{5})/2$ מבחינת פעולות חשבון בו (למשל, בהצבתו במשוואה המקורית כדי לבדוק אם הוא מקיים אותה) ומבחינת "תפיסת המספר", סדר גודלו ומיקומו על ציר המספרים. הדבר ניכר יותר אצל תלמידי 3 יח' לימוד.

המצב מסובך עוד יותר במקרה של אי-שוויון כמו $x^2 - x - 1$. כי, אם התלמיד יכתוב את קבוצת האמת כ$\{-0.618 < x < 1.618\}$, הרי פתרונות מסויימים של האי-שוויון כמו -0.61803 ו 1.61803 לא יימצאו בה.
איך ינהג תלמיד (או מורה) אם יידרש לחשב את ערך הפונרציה $f(x) = 0.5x^3 + 2x^2 - 1$ בנקודה $x = (-4 - \sqrt{17})/3$?

ג. מ ס פ ר י ם ט ר נ ס צ נ ד נ ט י י ם

(נזכיר, כי מספר נקרא טרנסצנדנטי אם איננו פיתרון של משוואה פולינומיאלית; כאלה הם למשל $e, \pi, 1$ cos או $\ell n2$).
איך להביע את אורך צלעו של משולש שנפתר באמצעות הטריגונומטריה - $a = 15\cos 28°$ או $a = 13.244$?
כאשר תלמיד פותר $(1/08)^x = 3.2$ בבעית גידול מעריכי, האם עליו

לכתוב $x = \ell n\ 3.2/\ell n\ 1.08$ שנים
או $x = 15.11$ שנים
או $x = 15$ שנים 41.4 ימים
או וכו'...

פתרון המשוואה $\sin x = 0.8$ ייכתב $x = \arcsin 0.8$ או $x = 0.927$?

ל ס י כ ו ם: האם לדרוש כתיבת הפיתרון המדוייק או להסתפק בהצגה עשרונית מקורבת שהתלמיד משיג מן המחשבון?

2. המצב כיום

בדרך כלל, המורים מקפידים על כתיבת הפיתרונות המדוייקים לפחות כשהם רציונליים. רוב המורים דורשים לכתוב 10/3 ולא יסתפקו ב- 3.33, וישנם גם הפוסלים את התשובה העשרונית המקורבת כלא נכונה! אחרים מנכים נקודת עונש בתקווה שהתלמיד ילמד לקח.
במקרה של מספרים אי-רציונליים ופיתרונות משוואות אלגבריות, מורים רבים לא יראו את ההצגה העשרונית כשגוייה, ונותנים לתלמידים "הטובים" לשחק בסימני השורש כאילו אין הכרח שכל הכיתה תנהג כך.
במקרה של תשובות טריגונומטריות, מעריכיות או לוגריתמיות המצב כמעט אחיד; לרוב, אין מקפידים לרשום את התשובה המדוייקת ומסתפקים בתשובה עשרונית.
התלבטות חדשה אצל התלמיד: כמה מן הספרות המופיעות במחשבון עליו להעתיק למחברת?

3. הצעת חוק

א. בכל מקרה תינתן תשובה עשרונית מקורבת (או מדוייקת) בקירוב שייקבע מראש בתוך התרגיל. אם לא נקבעה דרגת דיוק בתרגיל, "ברירת המחדל" תהיה בכל מקרה 4 ספרות משמעותיות.
אם התשובה מקורבת, התלמיד יכתוב "x = -4.153 בקירוב" או "x ≈ -4.153".

ב. אם התשובה רציונלית (כגון (-2/7), היא תופיע כתשובה הנכונה והיא תשמש להמשך חישובים (כמו הצבה בתבנית המקורית או חישוב ערך של פונקציה).

ג. במקרה של תשובה אי-רציונלית אלגברית (כמו $-3/\sqrt{5}$ או $(7-\sqrt{3})/2$) התלמיד יצטרך לרשום את הפיתרונות המדוייקים (בסימני שורש) וכן, כאמור, את ההצגה העשרונית, אך לא יידרש, חוץ ממקרים מיוחדים, המשך חישובים בסימני השורש, לפחות ברמה של 3 יחידות. חישובים מסובכים (כמו חישוב ערך של פונקציה) יוכלו להעשות בעשרונית גם ברמות של 4 ו 5 יחידות.

ד. בבעיות טריגונומטריות, מעריכיות ולוגריתמיות תידרש רק תשובה עשרונית בדיוק הנתון מראש. מכיוון שהתשובות מתקבלות במחשבון, על התלמיד לפרט איך הגיע לתשובה ולרשום, למעשה, את הפיתרון המדוייק לפני הצגתו העשרונית.

בבעיות של חישוב זמן (בשנים, ימים, שעות וכו') או זוויות יש לעודד לקבל כתשובה סופית את ההצגה העשרונית (4.7 שנים, 2.5 שעות, 56.13°), ואין לאלץ את התלמיד לעבור לתת-יחידות.

ל ס י כ ו ם: בכל מקרה (חוץ מאשר במספרים טרנסצנדנטיים) תינתן תשובה מדוייקת ותשובה מקורבת.

במספרים טרנסצנדנטיים נסתפק בתשובה מקורבת.

להמשך חישובים התלמיד יוכל להשתמש בתשובה העשרונית (פרט למקרה של מספרים רציונליים).

4. דוגמאות

בכל התרגילים דלהלן דייק עד כדי 0.001.

ד ו ג מ ה 1: פתור את המשוואה $-3x = 7$

תשובה: $\{-7/3\}$, ובקירוב $\{-2.333\}$.

ד ו ג מ ה 2: פתור את המשוואה $x^2 - x - 3 = 0$.

תשובה: $\{(1 - \sqrt{13})/2,\ (1 + \sqrt{13})/2\}$

ובקירוב $\{-1.303,\ 2.303\}$.

ד ו ג מ ה 3: פתור את המשוואה $x^3 = 5$.

תשובה: $\{\sqrt[3]{5}\}$, ובקירוב $\{1.710\}$

ד ו ג מ ה 4: פתור $\cos x = -0.697$ בדיוק אלפית.

תשובה: $\{-0.800 + 2\pi n,\ 0.800 + 2\pi n\}$

ד ו ג מ ה 5: תוך כמה שנים תוכפל אוכלוסיה הגדלה ב- 6% בשנה?

$$1.06^x = 2$$

$$x = \ln 2/\ln 1.06 \approx 11/896$$

תשובה: תוך 11.896 שנים.

ד ו ג מ ה 6: חשב את אורך היתר במשולש ישר-זווית שאחת מזוויותיו 22° והניצב לידה 45 ס"מ.

$$a = 45/\cos 22° \approx 120.13$$

תשובה: אורך היתר 120.13 ס"מ.

5. הערה: הערכת השגיאה

כדי להגיע לתשובה סופית בדיוק של 0.001, על התלמיד לבצע חישובי ביניים בדיוק רב ביותר. לצערנו אין בתוכנית הלימודים סעיף הדן בחשבון שגיאות; לכן יש לעודד את התלמיד לבצע חישובי ביניים בכל הספרות שמאפשר המחשבון, עם שימוש בזיכרון, ולעגל רק את התשובה הסופית.