



הנושא: **אפשר גם בלי טריגונומטריה - דרך אחרת לחישוב אורכי המחוגים של מעגל חוסם ומעגל חסום של משולש**

הוכן ע"י: קלרה זיסקין, עטרה שריקי.

תקציר: במאמר מוצגת דרך לחישוב אורך המחוג של המעגל החסום במשולש, אם ידוע הקשר בין היקפו של משולש לבין שטחו, וכן דרך לחישוב אורך המחוג של המעגל החוסם את המשולש אם ידועה מכפלת אורכי הצלעות. החישובים מתבצעים ללא שימוש בטריגונומטריה. החקירה המתמטית הזו מהווה דוגמא לחקירה שמתפתחת מעיסוק בבעיה שגרתית אותה ניתן למצוא בספרי לימוד רבים.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, משולש, מעגל חסום, מעגל חוסם, גיאומטריה, טריגונומטריה, היקף, שטח, נוסחת הרון.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 12-14.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

אפשר גם בלי טריגונומטריה - דרך אחרת לחישוב אורכי המחווגים של מעגל חוסם ומעגל חסום של משולש

קלרה זיסקין

claraz@research.haifa.ac.il

היחידה הקדם אקדמית, אוניברסיטת חיפה

עטרה שריקי

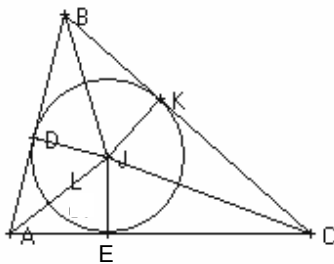
shriki@tx.technion.ac.il

"קשר חם", מוסד הטכניון למחקר ופיתוח
אורנים – המכללה האקדמית לחינוך

משולש זה. מהו האורך של מחוג המעגל החסום
במשולש?

פתרון:

מידת ההיקף של המשולש ABC שווה למידת השטח
שלו (ר' שרטוט 1).



מחוג המעגל החסום של מחוג
המעגל החסום במשולש. $JK = JE = JD = r$ כאשר r הוא האורך של מחוג

מידת ההיקף של המשולש: $P = AB + BC + CA$

כדי לחשב את מידת השטח של המשולש ניגזר
בחלוקתו לשלושה משולשים: AJB, BJC, CJA ונחשב
את שטח המשולש הנתון כסכום השטחים של שלושת
המשולשים הללו. בדרך זו ניתן יהיה להשתמש
באורכים של שלוש הצלעות של המשולש, ובכך לאפשר
קישור בין מידת השטח של המשולש לבין מידת היקפו.

$$S = \frac{AB \cdot r}{r} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CA \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(AB + BC + CA)$$

נשווה בין שתי המידות S ו- P ונקבל:

$$AB + BC + CA = \frac{r}{2}(AB + BC + CA) \Rightarrow r = 2$$

קיבלנו תכונה מעניינת: אורך המחוג של המעגל החסום
במשולש שבו המספר המודד את היקפו שווה למספר

לפניכם בעיה, נסו לפתור אותה:

נתון משולש ABC שאורכי צלעותיו הם:

$$a = 10 ; b = 15 ; c = 20$$

יש למצוא את אורך המחוג (רדיוס) של המעגל
החסום במשולש ואת אורך המחוג של המעגל
החוסם את המשולש.

שאלה מסוג זה משולבת לעיתים קרובות במהלך
לימודי הטריגונומטריה והיא מזמנת עבודה טכנית
מרובה, של שימוש באלגברה ובמשפטים
טריגונומטריים. האם יש דרך אחרת?

בהינתן האורכים של שלוש הצלעות המשולש בודאי ניתן
לחשב את היקף המשולש ואת שטחו, גם ללא שימוש
בשיקולים טריגונומטריים. ברשימה זו נראה שאם ידוע
הקשר בין היקפו של משולש לבין שטחו, קל מאד לחשב
את אורך המחוג של המעגל החסום במשולש זה.
בנוסף, אם ידועה מכפלת אורכי הצלעות, ניתן למצוא
בקלות את מחוג המעגל החוסם את המשולש.
החישובים מתבצעים ללא שימוש בטריגונומטריה.

לבעיה המוצגת לעיל הגענו בעקבות עיסוק בבעיה שניתן
למצוא בספרי לימוד רבים. הכללת הבעיה הביאה
אותנו לגילוי הקשרים שמופיעים בהמשך. להלן נתאר
את התהליך שעברנו החל מפתרון בעיה זו ועד לגילויים
של כמה קשרים מעניינים.

מחוג המעגל החסום במשולש

הבעיה הראשונית בה עסקנו הייתה:

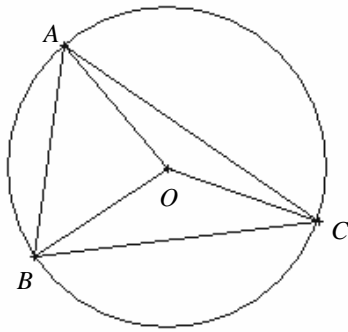
נתון משולש שעבורו ידוע שהמספר המודד את שטחו
שווה למספר המודד את היקפו. חוסמים מעגל בתוך

המודד את שטחו הוא 2 יחידות.

מחוג המעגל החוסם את המשולש

בבעיה הקודמת עסקנו בקשר שבין המספר המודד את שטח המשולש לבין המספר המודד את היקפו, כלומר – את **סכום** אורכי צלעותיו. בעקבות זאת, שאלנו את עצמנו, האם קיים קשר כלשהו בין המספר המודד את שטח המשולש לבין המספר המודד את **מכפלת** אורכי הצלעות שלו.

לאור זאת, עולה השאלה הבאה:
נתון משולש שעבורו ידוע שהמספר המודד את שטחו שווה למספר המתקבל ממכפלת אורכי הצלעות שלו.
א. חוסמים מעגל בתוך משולש זה. מהו האורך של מחוג המעגל החוסם במשולש?
ב. חוסמים את המשולש בתוך מעגל. מהו האורך של מחוג המעגל החוסם את המשולש?
ברשימה הנוכחית נתמקד רק בסעיף ב של השאלה, ונשאיר לקוראים להשיב על סעיף א.



שרטוט 2

פתרון:

מידת שטח המשולש ABC שווה למידת מכפלת הצלעות שלו (ר' שרטוט 2).

כאשר $OA = OB = OC = R$ הוא אורך המחוג של המעגל החוסם את המשולש. מידת המכפלה של הצלעות היא: $\Pi = AB \cdot BC \cdot CA$

את שטח המשולש ABC ניתן להביע בעזרת הנוסחה:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$

אבל לפי משפט הסינוסים: $\sin \angle BAC = \frac{BC}{2R}$. לכן

נקבל ששטח המשולש ABC הוא:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \frac{BC}{2R} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$$

נשווה בין שתי המידות, ו-S:

אפשר, אם כן, להכליל את הבעיה ולשאול: מה יהיה אורך המחוג של המעגל החוסם במשולש שמידת היקפו גדולה פי שניים ממידת שטחו? פי חמישה? פי k? על סמך הפתרון הקודם, קל לראות שאם המספר המודד את היקף המשולש גדול פי k מהמספר המודד את שטחו, מתקיים:

$$AB + BC + CA = k \cdot \frac{r}{2} (AB + BC + CA) \Rightarrow r = \frac{2}{k}$$

נחזור לבעיה המקורית. בבעיה זו נתון שמידת ההיקף היא: $P = 10 + 15 + 20 = 45$.

נשאר למצוא את שטחו המשולש. לצורך זה נייעזר בנוסחת הרון (Heron)¹. על-פי הנוסחה, אם נסמן ב-p את מחצית היקף המשולש,

$$p = \frac{a + b + c}{2}, \text{ נקבל ששטח המשולש הוא:}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

במקרה שלנו:

$$p = \frac{10 + 15 + 20}{2} = 22.5 \Rightarrow$$

$$S = \sqrt{22.5(22.5-10)(22.5-15)(22.5-20)} = \sqrt{5273.4375} \approx 72.618$$

נחשב את היחס בין המספר המודד את היקף המשולש לבין המספר המודד את שטחו:

$$k \approx \frac{45}{72.618} \approx 0.619$$

מכאן שאורך המחוג של המעגל החוסם במשולש הוא:

$$r \approx \frac{2}{0.619} \approx 3.227$$

בדקו את עצמכם:

נתון משולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם 3 סמ' ו-4 סמ'. מהו מחוג המעגל החוסם במשולש זה?

לאחר שמצאנו את אורך המחוג של המעגל החוסם במשולש שמידת היקפו גדולה פי k ממידת שטחו, שאלנו את עצמנו שאלה דומה לגבי אורך מחוג המעגל החוסם את המשולש. אנחנו מזמינים את הקוראים לנסות להשיב לשאלה זו.

¹ המתמטיקאי הרון נולד בערך בשנת 10 לספירה באלכסנדריה, מצרים.

הצלעות לבין המספר המודד את שטח המשולש, ונקבל:
 $\frac{3000}{72.618} \approx 41.312$. מכאן שאורך המחוג של המעגל

החוסם את המשולש הוא: $R \approx \frac{41.312}{4} = 10.328$.

לסיכום...

בהינתן משולש ABC שאורכי צלעותיו הם: a, b, c נוכל לבצע את הפעולות הבאות:

- היקף המשולש: $P = a + b + c$
- שטח המשולש: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- כאשר $p = P/2$
- מכפלת אורכי הצלעות: $\Pi = AB \cdot BC \cdot CA$
- מחוג המעגל החוסם במשולש: $r = \frac{2}{\left(\frac{P}{S}\right)} = \frac{2S}{P}$
- מחוג המעגל החוסם את המשולש: $R = \frac{\left(\frac{\Pi}{S}\right)}{4} = \frac{\Pi}{4S}$

$$AB \cdot BC \cdot CA = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

קיבלנו תכונה מעניינת נוספת: אורך המחוג של המעגל החוסם את המשולש שבו המספר המתאים למכפלת אורכי הצלעות שווה למספר המודד את שטחו, הוא 0.25 יחידת אורך.

גם כאן ניתן להכליל את הבעיה ולשאול: מה יהיה אורך המחוג של המעגל החוסם את המשולש שמידת המכפלה של אורכי צלעותיו גדולה פי k ממידת שטחו? על סמך הפתרון של הבעיה שלעיל, קל לראות שאם המספר המתאים למכפלת הצלעות של המשולש גדול פי k מהמספר המודד את שטחו, מתקיים:

$$AB \cdot BC \cdot CA = k \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{k}{4}$$

נחזור לבעיה המקורית. בסעיף קודם מצאנו שמידת השטח של המשולש היא 72.618. מידת המכפלה של אורכי הצלעות היא 3000. נחשב את היחס בין המספר המתאים למכפלת אורכי

האם כבר מזהאת ושלחת משוב?

המשק הופעתו של כתב-העת עליה תלוי בכך
 מטה מל"מ - המרכז הבינאונברסיטאי להוראת המצוינים
 מתנה את המשק תקצובו של כתב-העת בקבלת
 משובים מן השטח
 אנא מלאו המשוב בהקצם ושלחוהו אל מטה מל"מ.